解と係数　3

2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の 2 つの解を α, β とし, $\alpha^n+\beta^n=S_n$ (n は自然数) とする。
次のことを証明せよ。

(1) $a^2+a+1=0$ ならば, $a^{n+2}+a^{n+1}+a^n=0$

(2) $S_{n+2}=-(S_{n+1}+S_n)$

(3) $S_5=-1$

(1) $a^{n+2}+a^{n+1}+a^n=0$

$a^n(a^2+a+1)=0$ …① $a^2+a+1=0$ より ①の左辺は0

∴ $a^{n+2}+a^{n+1}+a^n=0$

(2) 仮定より

$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=-(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\alpha^n+\beta^n)$

$=-\{\alpha^n(\alpha+1)+\beta^n(\beta+1)\}$ …①

ここで $\alpha^2+\alpha+1=0$ より $\alpha+1=-\alpha^2$

$\beta^2+\beta+1=0$ より $\beta+1=-\beta^2$ であるから

①の右辺は

$-\{\alpha^n\cdot-\alpha^2+\beta^n\cdot-\beta^2\}$

$=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}$ となりこれは左辺と等しい

∴ $S_{n+2}=-(S_{n+1}+S_n)$ となる

(3) $S_1=\alpha+\beta=-1$ 又 $\alpha\beta=1$

$S_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2=-1$

$S_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-1+3=2$

$S_4=\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=1-2=-1$

$S_5=\alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^3-\alpha^3\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

$=-1\cdot2-1\cdot(-1)$

$=-2+1=-1$

よって $S_5=-1$