7

$x^2+y^2=4$ のとき, $ax+4y^2$ (a は定数) の最大値, 最小値を求めよ。

$y^2=4-x^2 \geqq 0$

$-x^2 \geqq -4$

$x^2 \leqq 4$ より　$-2 \leqq x \leqq 2$

$ax+4y^2$ に $y^2=4-x^2$ を代入すると

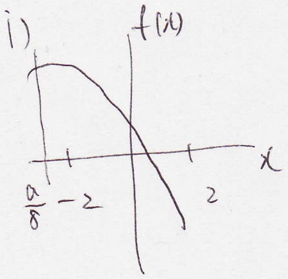
$ax+4(4-x^2)$

$ax+16-4x^2$ となり これを $f(x)$ として

平方完成すると

$f(x)=-4\left(x-\frac{a}{8}\right)^2+\frac{a^2}{16}+16$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$

i)

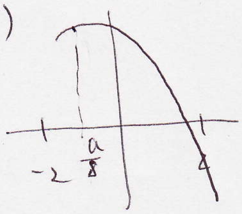


$\frac{a}{8} \leqq -2$ つまり $a \leqq -16$ のとき

最大値 $f(-2)=-2a$

最小値 $f(2)=2a$

ii)

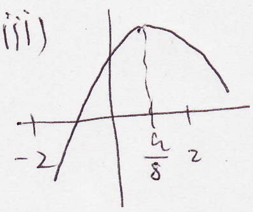


$-2 \leqq \frac{a}{8} \leqq 0$ つまり $-16 \leqq a \leqq 0$ のとき

最大値 $f\left(\frac{a}{8}\right)=\frac{a^2}{16}+16$

最小値 $f(2)=2a$

iii)

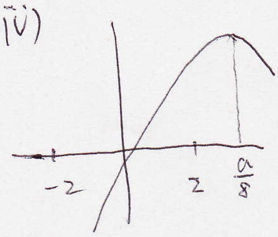


$0 \leqq \frac{a}{8} \leqq 2$ つまり $0 \leqq a \leqq 16$ のとき

最大値 $f\left(\frac{a}{8}\right)=\frac{a^2}{16}+16$

最小値 $f(-2)=-2a$

iv)



$\frac{a}{8} \geqq 2$ つまり $a \geqq 16$ のとき

最大値 $f(2)=2a$

最小値 $f(-2)=-2a$