

命題6-2

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ が無理数であることを証明しなさい。ただし、 $\sqrt{6}$ が無理数であることを用いてよい。

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ が有理数であるとすると

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = p \quad (p \text{は有理数}) \text{と仮定}$$

この両辺を2乗すると

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = p^2$$

$$5 + 2\sqrt{6} = p^2$$

$$2\sqrt{6} = p^2 - 5$$

$$\sqrt{6} = \frac{p^2 - 5}{2}$$

p は有理数なので、 $\frac{p^2 - 5}{2}$ も有理数となり

これは $\sqrt{6}$ が無理数であることに反する。

よって $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数である。