整数 10

a, b, c は整数で，$0 < a < b$ とする。x についての整式 $x^3 - (a+b)x^2 + abx - 23$ が $x - c$ で割り切れるような a, b, c の値をすべて求めよ。〔千葉大〕

$x - c$ で割り切れるということは $x = c$ を与式に代入すると 0 になる

よって

$c^3 - (a+b)c^2 + abc - 23 = 0$

$c^3 - (a+b)c^2 + abc = 23$

$c\{c^2 - (a+b)c + ab\} = 23$

$c(c-a)(c-b) = 23$

a, b, c は整数であるから，右辺の23が素数であることを考えると　$0 < a < b$ より

$c = 1$ となり

$c - a > c - b$ であるから $c - a < 0$　$c - b < 0$

$\begin{cases} c - a = -23 \\ c - b = -1 \end{cases}$　$\begin{cases} c - a = 23 \\ c - b = 1 \end{cases}$ これは $0 < a < b$ より不適

$c = 1$ より $a = 24,\ b = 2$

$c = -1$ のときは

$c - a < 0$，$c - b < 0$ となり積の結果が負となるので適さない

$\therefore$ $a = 24,\ b = 2,\ c = 1$