

x, y を自然数とすると, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ となる x, y の値の組は

$(x, y) = (\square, \square), (\square, \square)$

である。

[同志社大]

与式から

$$\frac{y-x}{xy} = \frac{1}{4} \text{ より}$$

$$xy = 4(y-x)$$

$$xy + 4x - 4y = 0 \text{ と変形}$$

$$(x-4)(y+4) + 16 = 0$$

$$(x-4)(y+4) = -16 \text{ と変形し変える}$$

ここで $x-4 > 0$ のとき $y+4 < 0 \dots (i)$

$x-4 < 0$ のとき $y+4 > 0 \dots (ii)$ と変える

x, y は自然数であることから (i) の $y+4 < 0$ は成り立たないから (i) は不可

(ii) のとき

$$x-4 < 0 \text{ であるから } x = 1, 2, 3.$$

$x=1$ のとき $x-4 = -3$ となり $-3(y+4) = -16$ となり

自然数 y は存在しない

$x=2$ のとき $x-4 = -2$ となり $-2(y+4) = -16$ を解くと

$$y = 4$$

$x=3$ のとき $x-4 = -1$ となり $-(y+4) = -16$ を解くと

$$y = 12$$

$$\therefore (x, y) = (2, 4), (3, 12)$$