

整数15

(1) n が整数のとき、 $(n^5 - n) - 5(n^3 - n)$ が5の倍数であることを示せ。

(2) n が整数のとき、 $n^5 - n$ が30の倍数であることを示せ。

一般に m が2以上の整数のとき、連続する m 個の整数の積が m の倍数であることは成り立つ。このことは証明なしに使ってよい。

[京都教育大]

(1)

$$\begin{aligned} & (n^5 - n) - 5(n^3 - n) \\ &= n(n^4 - 1) - 5n(n^2 - 1) \\ &= n(n^2 + 1)(n^2 - 1) - 5n(n^2 - 1) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

連続する5つの整数の積なので5の倍数である

(2) 小問

$$\begin{aligned} & \left\{ (n^5 - n) - 5(n^3 - n) \right\} + 5(n^3 - n) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ は 2, 3, 5 の倍数である。

最低1つは含まれるので30の倍数になる。

$5(n-1)n(n+1)$ の $(n-1)n(n+1)$ は連続する3つの整数の積なので、6の倍数となるから $5(n-1)n(n+1)$ も30の倍数

つまり

$n^5 - n$ は30の倍数である。