H28.6.29 訂正

n は自然数とする。整数 $a_n = 19^n + (-1)^{n-1} \times 2^{4n-3}$ の全てを割り切る素数は 7 であること数学的帰納法を用いて表わせ。

(1) $n=1$ のとき $a_1=21$ となり 7で割り切れる

(2) $n=k$ のとき

$a_k = 19^k + (-1)^{k-1} \times 2^{4k-3} = 7t$ (tは整数)

が成り立つとすると

$n=k+1$ のとき

$a_{k+1} = 19^{k+1} + (-1)^k \times 2^{4k+1}$

$= 19 \cdot 19^{k+1} + 19 \cdot (-1)^{k-1} \times 2^{4k-3} - 19 \cdot (-1)^{k-1} \times 2^{4k-3} + (-1)^k \times 2^{4k+1}$

$= 19(19^{k+1} + (-1)^{k-1} \times 2^{4k-3}) - 19 \cdot (-1)^{k-1} \times 2^{4k-3} - 16 \cdot (-1)^{k-1} \times 2^{4k-3}$

$= 19a_k - (19+16)(-1)^{k-1} \times 2^{4k-3}$

$= 19 \cdot 7t - 35 \cdot (-1)^{k-1} \times 2^{4k-3}$

$= 7\{19t - 5 \cdot (-1)^{k-1} \times 2^{4k-3}\}$

よって $7 \times$ (整数) となるので

$n=k+1$ のときも成り立つ。

したがって 数学的帰納法により

題意は示された。