

1. $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で定義された関数

$$f(\theta) = 4 \cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2} \cos 2\theta - 4 \sin \theta$$

を考える。

- (1) $x = \sin \theta$ とおく。 $f(\theta)$ を x で表せ。
- (2) $f(\theta)$ の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めよ。
- (3) 方程式 $f(\theta) = k$ が相異なる 3 つの解をもつような実数 k の値を求めよ。

[北海道大]

2. a, b, c を定数とし, $a > 0$ とする。関数 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = -ax^2 + bx + c$$

と定める。

- (1) 2つの放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が2つの交点をもつための必要十分条件を求めよ。
- (2) 2つの放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が2つの交点 $(-1, 1), (2, 4)$ をもつとする。このとき, b と c を a を用いて表せ。
- (3) (2) の条件のもとで, 2つの放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積が9であるとき, a, b, c の値を求めよ。

〔室蘭工大〕

3. 関数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$ について次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け。

(2) 実数 a に対して, $a \leq x \leq a+2$ のときの $f(x)$ の最小値を $g(a)$ とおく, 関数 $b = g(a)$ のグラフの概形を ab 平面上にかけ。

[弘前大]

4. k を実数とする。 xy 平面上の放物線 $C: y = x^2 + 2x - 2$ と直線 $l: y = kx$ が異なる 2 点で交わり、交点の x 座標をそれぞれ α, β とする。ただし、 $\alpha < \beta$ である。 C と l で囲まれた図形の面積を S とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $(\beta - \alpha)^2$ を k の式で表せ。

(2) $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ であることを示せ。

(3) S^2 の最小値とそのときの k の値を求めよ。

〔秋田大〕

5. 関数 $f(x) = ax^3 - (a+3)x + a + 3$ について、次の問いに答えよ。ただし a は 0 でない実数とする。

(1) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする。 x の方程式 $f'(x) = 0$ が実数解をもつような a の範囲を求めよ。そのときの実数解をすべて求めよ。

(2) x の方程式 $f(x) = 0$ が 3 個の異なる実数解をもつような a の範囲を求めよ。

〔宮城教育大〕

6. $f(x) = x^3 - 3x$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の接線のうち、点 $(2, 2)$ を通るものの方程式をすべて求めよ。
- (3) 点 $(2, t)$ から曲線 $y = f(x)$ に 3 本の接線が引けるとき、 t の値の範囲を求めよ。

〔岩手大〕

7. 関数 $f(x) = 2\sin^2 x + 4\sin x + 3\cos 2x$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 $0 \leq x < 2\pi$ である。

(1) $t = \sin x$ とするとき、 $f(x)$ を t の式で表せ。

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値をすべて求めよ。

(3) 方程式 $f(x) = a$ の相異なる解が 4 個であるような実数 a の値の範囲を求めよ。

〔岩手大〕

8. 3次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ について、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ における曲線の接線を l_t とする。

- (1) l_t の方程式を求めよ。
- (2) l_t が原点を通るような t の値がただ1つに定まるための a, b の条件を求めよ。
- (3) a, b が (2) の条件を満たすとき、点 (a, b) が存在する領域を図示せよ。

〔富山大〕

9. 曲線 $C: y = |x^2 - 2x|$ と傾きが m の直線 $l: y = mx$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = -x^2 + 2x$ と l が接する m の値を求めよ。
- (2) C と l が原点以外の相異なる 2 点で交わるような m の範囲を求めよ。また、そのときの 2 つの交点の座標を m を用いて表せ。
- (3) m は (2) で求められた範囲にあるとする。 $x \geq 2, y \leq mx, y \geq |x^2 - 2x|$ で定まる部分の面積 S を m を用いて表せ。

〔金沢大〕

10. xy 平面において、点 $P(a, b)$ (ただし、 $a \geq 0$ とする) から曲線 $y = f(x) = x^3 - 3x$ にひける接線
の数が 2 本以下とする。そのような点 P のとりうる範囲を求め、図示せよ。〔福島県医大〕

11. 次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = |x(x - 1)|$ の概形をえがけ。

(2) $\int_0^3 |x(x - 1)| dx$ の値を求めよ。

(3) (1) の曲線と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_1 とする。このとき、原点を通り、面積 S_1 を二等分する直線の方程式を求めよ。

(4) (1) の曲線 ($x \geq 1$)、 x 軸および直線 $x = 3$ の三つで囲まれる図形の面積を S_2 とする。このとき、原点を通り、面積の和 $S_1 + S_2$ を二等分する、直線の方程式を求めよ。

〔久留米大〕

12. 方程式 $2x^3 - 3x^2 - 12x - a = 0$ が異なる 3 つの実数解 α, β, γ をもち、 $\alpha < \beta < \gamma$ であるとき

- (1) 実数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) α, β, γ は、それぞれどのような範囲にあるか。