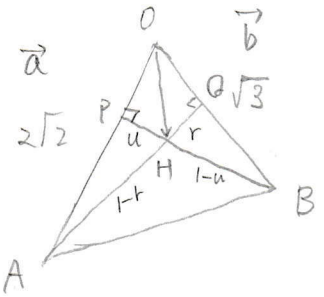
✓ bekuu

$OA=2\sqrt{2}$, $OB=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ である $\triangle OAB$ の垂心を H とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき, $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (但し, s, t は実数) と置くことにより, $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。



PH : HB = u : 1-u $0<u<1$

QH : HA = r : 1-r $0<r<1$

とすると

$\overrightarrow{OH}=(1-u)l\vec{a}+u\vec{b}$ l は実数 …①

$\overrightarrow{OH}=(1-r)k\vec{b}+r\vec{a}$ k は実数 …②

$\overrightarrow{AQ}=k\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BP}=l\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{AQ}\perp\overrightarrow{OB}$ より $\vec{b}(k\vec{b}-\vec{a})=0$

$k|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$3k-2=0$

$k=\frac{2}{3}$

$\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{OA}$ より $\vec{a}(l\vec{a}-\vec{b})=0$

$l|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$8l-2=0$

$l=\frac{1}{4}$

これより

②は

$\overrightarrow{OH}=\frac{2}{3}(1-r)\vec{b}+r\vec{a}$ …②'

これより

①は

$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{4}(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$ …①'

①'=②' なので

$\frac{2}{3}(1-r)\vec{b}+r\vec{a}=\frac{1}{4}(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$

$\left(-\frac{1}{4}u-r+\frac{1}{4}\right)\vec{a}+\left(u+\frac{2}{3}r-\frac{2}{3}\right)\vec{b}=0$ となる

$\vec{a}\neq0$ $\vec{b}\neq0$ なので

$\begin{cases}-\frac{1}{4}u-r+\frac{1}{4}=0\\ u+\frac{2}{3}r-\frac{2}{3}=0\end{cases}$

$\begin{cases}-u-4r=-1\\ 3u+2r=2\end{cases}$

$-u-4r=-1$
$+)\ 6u+4r=4$
$5u=3$
$u=\frac{3}{5}$

$\frac{3}{5}-4r=-1$

$-4r=-\frac{2}{5}$

$r=\frac{1}{10}$

$-\frac{5}{5}+\frac{3}{5}$

よって $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{10}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$