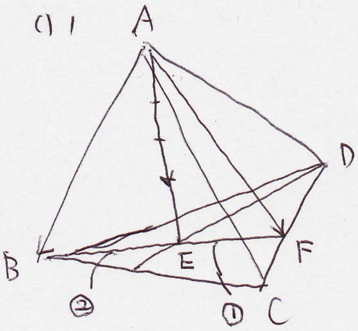
四面体 ABCD の 1 つの面 BCD の重心を E とし，AE 上に点 G をとって $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ で表わせ。

(2) 任意の点 P に対して，$\overrightarrow{PG}$ を $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PD}$ で表わせ。

〔福岡大〕

(1)



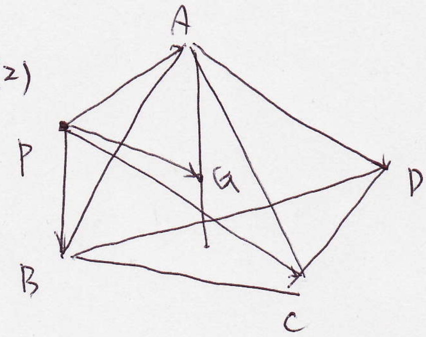
$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF}$ (BE : EF = 2 : 1)

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$ であるから

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

よって $\overrightarrow{AE}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}$ //

(2)



$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ より (1) から

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}$

$=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{4}$ となり

$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{4}$ となる

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA}$ から

$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\dfrac{\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA}}{4}$

となり $\overrightarrow{PG}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{4}$

となる