



空間の3つのベクトル  $(1, 0, 0)$ ,  $(3, 4, 0)$ ,  $(1, 2, 2)$  のどれとも等しい角をなす、長さ1のベクトルを求めよ。 [立教大]

求めるベクトルを  $P(a, b, c)$  とする

$$A(1, 0, 0), B(3, 4, 0), C(1, 2, 2)$$

とすると

$$|\vec{OA}| = 1 \quad |\vec{OB}| = 5 \quad |\vec{OC}| = 3 \quad |\vec{OP}| = 1$$

とすると

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \text{①}$$

①より

$$\frac{a+0+0}{1 \cdot 1} = \frac{3a+4b+0}{1 \cdot 5} = \frac{a+2b+2c}{1 \cdot 3} \quad \text{とすると}$$

$$a = \frac{3a+4b}{5} = \frac{a+2b+2c}{3}$$

$$a = \frac{3a+4b}{5} \quad \text{より} \quad a = 2b \quad \text{②}$$

$$\frac{3a+4b}{5} = \frac{a+2b+2c}{3} \quad \text{より} \quad 2a+b=5c \quad \text{③}$$

$$a = \frac{a+2b+2c}{3} \quad \text{より} \quad a-b=c \quad \text{④}$$

$$\text{②, ④より} \quad b=c \quad \text{とすると} \quad b = \frac{a}{2} \quad c = \frac{a}{2} \quad \text{とすると①より}$$

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{3}{2}a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{2}{3}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{とすると} \quad b = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \quad c = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

よって求めるベクトルは

$$\left( \pm \frac{\sqrt{6}}{3}, \pm \frac{\sqrt{6}}{6}, \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \right)$$

符号同順と対子

