



平面上において、 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, $|\vec{OA}| = 1$, $|\vec{OB}| = 2$ となる2つのベクトル $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ がある。この平面上に点O以外の点Cを、 $\vec{OC} \perp \vec{AB}$ および $\triangle ABC$ が直角三角形となるようにとる。 $\vec{OC} = m\vec{a} + n\vec{b}$ と表わすとき、 m と n の値を求めよ。

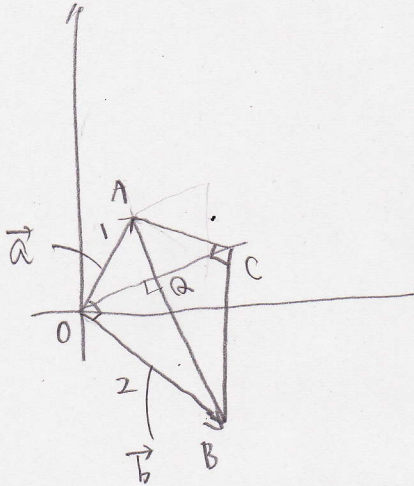
[大阪電通大]

$\vec{OC} \perp \vec{AB}$ かつ

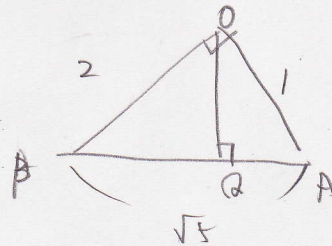
$\angle CAB, \angle CBA$ は 90° になる
よって

$\angle ACB = 90^\circ$ となる点Cは

右図のようになる。



$\triangle OAB$ に相似を使うと



$AB = \sqrt{5}$ かつ

$1 : \sqrt{5} = AO : 1$

$\sqrt{5} AQ = 1$

$AQ = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

よって $BQ = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

よって

$$BQ : QA = \frac{4\sqrt{5}}{5} : \frac{\sqrt{5}}{5} = 4 : 1$$

よって

$$\vec{OQ} = \frac{4}{5} \vec{OA} + \frac{1}{5} \vec{OB}$$

$$\vec{OC} = 2 \vec{OQ} \text{ かつ}$$

$$\vec{OC} = \frac{8}{5} \vec{OA} + \frac{2}{5} \vec{OB}$$

$$\text{よって } \vec{OC} = \frac{8}{5} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b}$$

