



11月28日



xyz空間における原点Oと3点A(1, 2, 3), B(1, 1, -1), P(2, 2, 2)について、次の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{OA}, \vec{OB}$  のなす角を求めよ。
- (2)  $\vec{OA}$  及び  $\vec{OB}$  に垂直で大きさ1の全てのベクトルを成分で表わせ。
- (3)  $\vec{OA}$  と平行なベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{OB}$  と平行なベクトル  $\vec{b}$ ,  $\vec{OA}$  及び  $\vec{OB}$  に垂直なベクトル  $\vec{c}$  が  $\vec{OP} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  を満たすとする。このとき、ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  を成分で表わせ。
- (4) 四面体 OABP の体積を求めよ。

1)  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (1, 2, 3) \cdot (1, 1, -1) = 1 + 2 - 3 = 0$  [岩手大]  
 $\cos\theta = 0$  故  $90^\circ$

(2) 求めるベクトルの成分を  $P(x, y, z)$  とおす。

$\vec{OA} \perp \vec{OP}$  故  $x + 2y + 3z = 0$  ... ①  
 $\vec{OB} \perp \vec{OP}$  故  $x + y - z = 0$  ... ②  
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ... ③  
 ① + ②  $\times 3$  故  $4x + 5y = 0$   
 $y = -\frac{4}{5}x$   
 ① - ②  $\times 2$   $-x + 5z = 0$   
 $z = \frac{1}{5}x$  故 ③ は

$x^2 + \frac{16}{25}x^2 + \frac{1}{25}x^2 = 1$   
 $\frac{42}{25}x^2 = 1$   
 $x^2 = \frac{25}{42}$   
 $x = \pm \frac{5}{\sqrt{42}}$

$\pm \frac{1}{\sqrt{42}} (5, -4, 1)$  複号同順

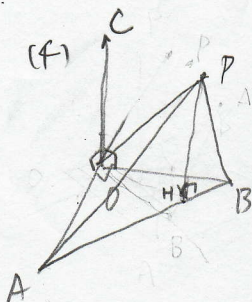
3)  $\vec{OA} = (1, 2, 3)$   $\vec{OB} = (1, 1, -1)$   $\vec{OC} = (5, -4, 1)$   $\vec{OP} = (2, 2, 2)$

$\vec{a} = k\vec{OA}$   $\vec{b} = l\vec{OB}$   $\vec{c} = m\vec{OC}$

$\vec{OP} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  故  $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = \vec{OA} \cdot \vec{a} + \vec{OA} \cdot \vec{b} + \vec{OA} \cdot \vec{c} = k|\vec{OA}|^2$  故  
 $12 = 14k$   $k = \frac{6}{7}$   $\vec{a} = \frac{6}{7}(1, 2, 3)$

$\vec{OB} \cdot \vec{OP} = \vec{OB} \cdot \vec{a} + \vec{OB} \cdot \vec{b} + \vec{OB} \cdot \vec{c} = l|\vec{OB}|^2$  故  
 $2 = 3l$   $l = \frac{2}{3}$   $\vec{b} = \frac{2}{3}(1, 1, -1)$

$\vec{OC} \cdot \vec{OP} = \vec{OC} \cdot \vec{a} + \vec{OC} \cdot \vec{b} + \vec{OC} \cdot \vec{c} = m|\vec{OC}|^2$  故  
 $4 = 42m$   $m = \frac{2}{21}$   $\vec{c} = \frac{2}{21}(5, -4, 1)$



$\vec{PH} \parallel \vec{OC}$

$\vec{PH} = \frac{2}{21} \vec{OC}$  故  $PH = \frac{2}{21} \sqrt{42}$

向きの逆

数楽 <http://www.mathtext.info/>

$|\vec{OA}| = \sqrt{14}$   $|\vec{OB}| = \sqrt{3}$  故 求める体積は

$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{21} \sqrt{42} = \frac{2}{3}$

