

ベクトル3P



座標空間内に3点 A(0, 1, 2), B(3, 3, 3), C(0, 5, 4) をとる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の重心と面積を求めよ。
- (2) ベクトル \vec{AB}, \vec{AC} の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。
- (3) 空間内の1点 P から $\triangle ABC$ を含む平面に下ろした垂線が $\triangle ABC$ の重心を通り、四面体 PABC の体積が5となる時、P の座標を求めよ。

(1)

[愛知教育大]

$$\left(\frac{0+3+0}{3}, \frac{1+3+5}{3}, \frac{2+3+4}{3} \right) \rightarrow (1, 3, 3)$$

$$\vec{AB} = (3, 2, 1) \quad \text{面積 } S = \frac{1}{2} \sqrt{14 \cdot 20 - 10^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\vec{AC} = (0, 4, 2)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{14} \quad |\vec{AC}| = 2\sqrt{5}$$

座標 (1, 3, 3) 面積 $3\sqrt{5}$

(2) 求めるベクトルを $T(x, y, z)$ とすると

$$3x + 2y + z = 0 \quad \leftarrow \text{代入して} \rightarrow x=0$$

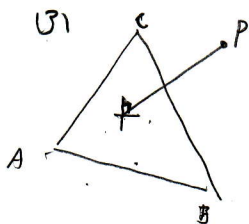
$$4y + 2z = 0 \rightarrow z = -2y$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x=0, z=-2y \text{ 代入して } 5y^2 = 1 \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \therefore z = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}$$

\therefore 求めるベクトル

$$(0, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \mp \frac{2}{\sqrt{5}})$$



$\triangle ABC$ $3\sqrt{5}$ より P から重心への垂線の長さ h とすると

$$3\sqrt{5} \times h \times \frac{1}{3} = 5 \quad h = \sqrt{5}$$

\therefore 求める単位ベクトルは $(0, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \mp \frac{2}{\sqrt{5}})$ より $h = \sqrt{5}$ より

$$\vec{PQ} = \sqrt{5} (0, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \mp \frac{2}{\sqrt{5}}) = (0, \pm 1, \mp 2)$$

Q の座標が $(1, 3, 3)$ より $(1-a, 3-b, 3-c) = (0, \pm 1, \mp 2)$

$$\text{より } P(1, 2, 5) \text{ または } (1, 4, 1)$$

