点Oを中心とする円に四角形ABCDが内接していて，次をみたす。

$$AB=1,\ BC=CD=\sqrt{6},\ DA=2$$

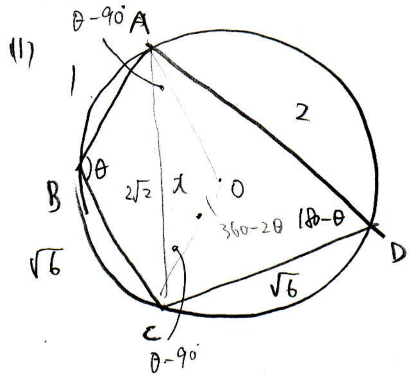
(1) ACを求めよ。

(2) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}$ および $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。

(3) $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$ となる x, y の値を求めよ。

〔一橋大〕

(1)



$x^2=1+6-2\sqrt{6}\cos\theta=7-2\sqrt{6}\cos\theta$

$x^2=4+6-4\sqrt{6}\cos(180-\theta)=10+4\sqrt{6}\cos\theta$

$7-2\sqrt{6}\cos\theta=10+4\sqrt{6}\cos\theta$

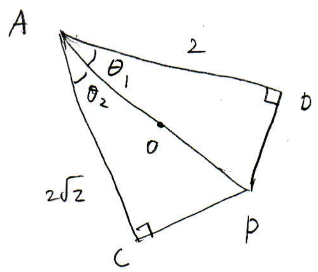
$6\sqrt{6}\cos\theta=-3$

$\cos\theta=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$　$\therefore x^2=7-2\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)=8$

$x>0$ より　$AC=2\sqrt{2}$

(2)

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AD}|\cos\theta_1=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AP}|\cos\theta_1=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2=2$



$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta_2=\frac{1}{2}|AC|\,|AP|\cos\theta_2$

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=4$

$\therefore\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=2\qquad\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=4$

(3)

$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+y|\overrightarrow{AD}|^2$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=x|\overrightarrow{AC}|^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$$\begin{cases}x\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+4y=2\\8x+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=4\end{cases}$$

$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}|$ より

$|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{AD}|^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2$

$6=4-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+8$

$2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=6$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=3$

これより

$$\begin{cases}3x+4y=2\\8x+3y=4\end{cases}$$

これを解いて　$x=\frac{10}{23},\ y=\frac{4}{23}$