

ごうかく!

ベクトルMP2

ごうかく!

Oを原点とする座標空間に2点A(1, 0, 3), B(2, 5, -4)をとり, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

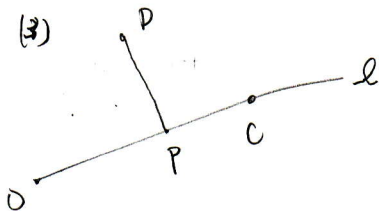
- (1) \vec{a}, \vec{b} のなす角を $\theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ とするとき, $\sin \theta$ の値を求めよ。
- (2) ベクトル \vec{OC} が \vec{a}, \vec{b} のいずれとも垂直になるような点 $C(x, y, z)$ のうちで $|OC| = 1$ となるものを求めよ。
- (3) 原点Oと(2)で求めた点Cを通る直線を l とする。点 $D(0, 0, 7)$ から l に下ろした垂線が l と交わる点を P とする。Pの座標を求めよ。
- (4) 四面体OABPの体積 V を求めよ。

4+2+1+6

(1) $|\vec{OA}| = \sqrt{10}$ $|\vec{OB}| = 3\sqrt{5}$ $\therefore \cos \theta = \frac{2-12}{\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5}} = -\frac{2}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ [東京農工大]

$\therefore \sin^2 \theta = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ より $\sin \theta > 0$ $\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$

(2) $C(x, y, z)$ とし
 $\vec{OA} \perp \vec{OC}$ より $x+3z=0$ $x=-3z$
 $\vec{OB} \perp \vec{OC}$ より $2x+5y-4z=0$ $y=2z$ $\therefore C(-3z, 2z, z)$

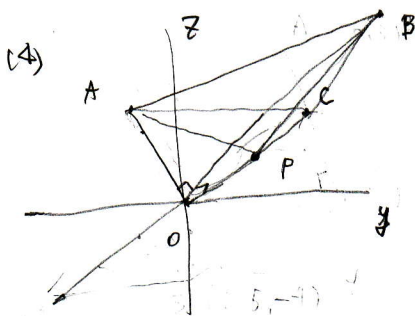


$\vec{OP} = k\vec{OC} = (-3k, 2k, k)$

$\vec{DP} = (-3k, 2k, k-7)$

$\vec{DP} \perp \vec{OC}$ より $9k+4k+k-7=0$ $k = \frac{1}{2}$

$\therefore \vec{OP} = (-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$ $\therefore P(-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$



四面体OABCは

$|\vec{OC}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$\Delta OAB = \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{10})^2 (3\sqrt{5})^2 - (2-12)^2} = \frac{5\sqrt{14}}{2}$

\therefore 四面体OABC $= \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{14}}{2} \cdot \sqrt{14} = \frac{70}{6} = \frac{35}{3}$

\therefore 四面体OABPは $\frac{1}{2}$ の半分であるので $\frac{35}{6}$

ごうかく!

ごうかく!