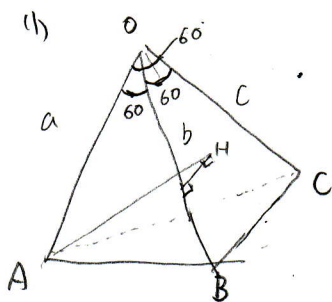




四面体 OABC において、 $\angle BOC = \angle COA = \angle AOB = 60^\circ$  とする。頂点 A から、3 点 O, B, C を通る平面に下ろした垂線を AH とし、点 H から直線 OB に下ろした垂線を HD とする。辺 OA, OB, OC の長さを  $a, b, c$  として、次の問いに答えよ。

- (1) 内積  $\vec{OH} \cdot \vec{OB}$  および  $\vec{OH} \cdot \vec{OC}$  を、それぞれ  $a, b, c$  で表わせ。
- (2) 線分 OH は  $\angle BOC$  を 2 等分することを示せ。
- (3)  $\vec{AD} \perp \vec{OB}$  であることを示せ。さらに線分 OD および線分 OH の長さをそれぞれ  $a$  で表わせ。
- (4) 四面体 OABC の体積を  $a, b, c$  で表わせ。

[新潟大]



$$\begin{aligned} \vec{OH} \cdot \vec{OB} &= (\vec{OA} + \vec{AH}) \cdot \vec{OB} \\ &= \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{AH} \cdot \vec{OB} \end{aligned}$$

$\vec{AH} \cdot \vec{OB} = 0$  ㉙

$$= |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos 60^\circ = \frac{ab}{2}$$

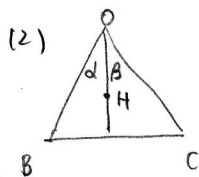
$\therefore \vec{OH} \cdot \vec{OB} = \frac{ab}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{OH} \cdot \vec{OC} &= (\vec{OA} + \vec{AH}) \cdot \vec{OC} \\ &= \vec{OA} \cdot \vec{OC} + \vec{AH} \cdot \vec{OC} \end{aligned}$$

$\vec{AH} \cdot \vec{OC} = 0$

$$= |\vec{OA}| |\vec{OC}| \cos 60^\circ = \frac{ac}{2}$$

$\therefore \vec{OH} \cdot \vec{OC} = \frac{ac}{2}$



$$\begin{aligned} \vec{OB} \cdot \vec{OH} &= |\vec{OB}| |\vec{OH}| \cos \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{\vec{OB} \cdot \vec{OH}}{|\vec{OB}| |\vec{OH}|} = \frac{a}{2|\vec{OH}|} \quad \text{㉚} \end{aligned}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{OC} \cdot \vec{OH}}{|\vec{OC}| |\vec{OH}|} = \frac{a}{2|\vec{OH}|} \quad \text{㉛}$$

㉚, ㉛より  $\cos \alpha = \cos \beta$  であるから  $\alpha = \beta$   $\therefore$  OH は  $\angle BOC$  を 2 等分する

(3)  $\vec{AD} = \vec{AH} + \vec{HD}$   $\vec{OB} = \vec{OC} - \vec{BC}$

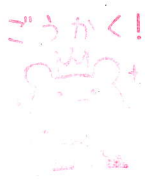
$$\therefore \vec{AD} \cdot \vec{OB} = (\vec{AH} + \vec{HD}) \cdot \vec{OB} = \vec{AH} \cdot \vec{OB} + \vec{HD} \cdot \vec{OB} = 0 \quad \therefore \vec{AD} \perp \vec{OB}$$

(4) (3)より  $\alpha = \beta = 30^\circ$  であるから  $|\vec{OH}| = \frac{a}{2 \cos 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\triangle OAH$  三平方の定理より  $AH = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} a$

$\triangle OBC = \frac{1}{2} bc \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} bc$

$\therefore$  求める体積は  $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} bc \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} a = \frac{\sqrt{2}}{12} abc$   $\therefore \frac{\sqrt{2}}{12} abc$



$\frac{\sqrt{2}}{12} a$