



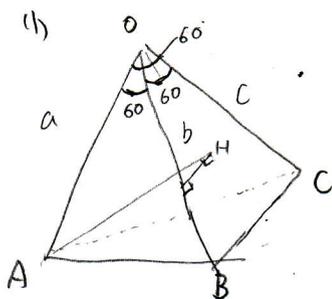
〜7.11.44



四面体 OABC において、 $\angle BOC = \angle COA = \angle AOB = 60^\circ$ とする。頂点 A から、3 点 O, B, C を通る平面に下ろした垂線を AH とし、点 H から直線 OB に下ろした垂線を HD とする。辺 OA, OB, OC の長さを a, b, c として、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{OH} \cdot \vec{OB}$ および $\vec{OH} \cdot \vec{OC}$ を、それぞれ a, b, c で表わせ。
- (2) 線分 OH は $\angle BOC$ を 2 等分することを示せ。
- (3) $\vec{AD} \perp \vec{OB}$ であることを示せ。さらに線分 OD および線分 OH の長さをそれぞれ a で表わせ。
- (4) 四面体 OABC の体積を a, b, c で表わせ。

[新潟大]



$$\begin{aligned} \vec{OH} \cdot \vec{OB} &= (\vec{OA} + \vec{AH}) \cdot \vec{OB} \\ &= \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{AH} \cdot \vec{OB} \end{aligned}$$

$\vec{AH} \cdot \vec{OB} = 0$ ㉙

$$= |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos 60^\circ = \frac{ab}{2}$$

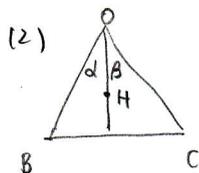
$\therefore \vec{OH} \cdot \vec{OB} = \frac{ab}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{OH} \cdot \vec{OC} &= (\vec{OA} + \vec{AH}) \cdot \vec{OC} \\ &= \vec{OA} \cdot \vec{OC} + \vec{AH} \cdot \vec{OC} \end{aligned}$$

$\vec{AH} \cdot \vec{OC} = 0$

$$= |\vec{OA}| |\vec{OC}| \cos 60^\circ = \frac{ac}{2}$$

$\therefore \vec{OH} \cdot \vec{OC} = \frac{ac}{2}$



$$\vec{OB} \cdot \vec{OH} = |\vec{OB}| |\vec{OH}| \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{OH}}{|\vec{OB}| |\vec{OH}|} = \frac{a}{2|\vec{OH}|} \quad \text{㉚}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{OC} \cdot \vec{OH}}{|\vec{OC}| |\vec{OH}|} = \frac{a}{2|\vec{OH}|} \quad \text{㉛}$$

㉚) ㉛) $\cos \alpha = \cos \beta$ ㉚) ㉛) $\alpha = \beta$ \therefore OH は $\angle BOC$ を 2 等分する

$$\vec{AD} = \vec{AH} + \vec{HD} \quad \vec{OB} = \vec{OC} - \vec{BC}$$

$$\therefore \vec{AD} \cdot \vec{OB} = (\vec{AH} + \vec{HD}) \cdot \vec{OB} = \vec{AH} \cdot \vec{OB} + \vec{HD} \cdot \vec{OB} = 0 \quad \therefore \vec{AD} \perp \vec{OB}$$

(4) (2) ㉙) $\alpha = \beta = 30^\circ$ ㉚) ㉛) $|\vec{OH}| = \frac{a}{2 \cos 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\triangle OAH$ \equiv 平方の定理より $AH = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} a$

$\triangle OBC = \frac{1}{2} bc \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} bc$

\therefore 求める体積は $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} bc \sqrt{\frac{2}{3}} a = \frac{\sqrt{2}}{12} abc$ $\therefore \frac{\sqrt{2}}{12} abc$

数楽 <http://www.mathtext.info/>



$\frac{\sqrt{2}}{12} a$