ベクトル50

辺ABを下底とする台形ABCDがAD=DC=CB=1, AB>1を満たしている。対角線ACとBDの交点をP, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{x}$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{y}$ とし, $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を $\vec{x}\cdot\vec{y}$ と表す。次の問いに答えよ。

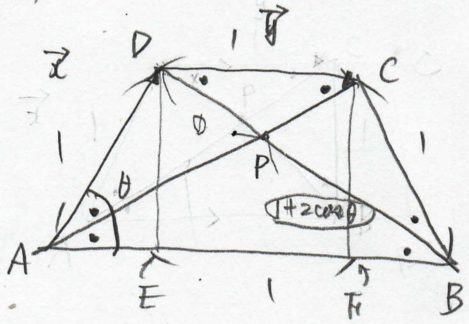
(1) ABを $\vec{x}\cdot\vec{y}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}\cdot\vec{y}$ を用いて表せ。

(3) $\vec{x}\cdot\vec{y}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき△ABPの面積を求めよ。

〔静岡大〕

(1)



$\theta=\angle DAB$として

$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos\theta$

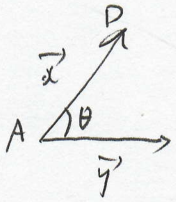
$=\cos\theta$

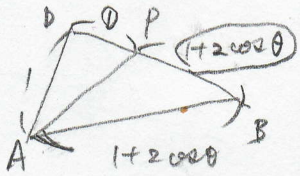
$AB=AE+EF+FB$

$=\cos\theta+1+\cos\theta$

$=1+2\cos\theta$

$=1+2\,\vec{x}\cdot\vec{y}$





(2)

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2+2\cos\theta}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1+2\cos\theta}{2+2\cos\theta}\overrightarrow{AD}$

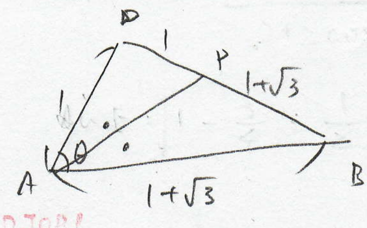
$\overrightarrow{AB}=(1+2\cos\theta)\vec{y}$ より

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}\vec{y}+\dfrac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}\vec{x}$

$=\dfrac{1+2\cdot\vec{x}\cdot\vec{y}}{2(1+\vec{x}\cdot\vec{y})}\vec{y}+\dfrac{1+2\vec{x}\cdot\vec{y}}{2(1+\vec{x}\cdot\vec{y})}\vec{x}$

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1+2\cdot\vec{x}\cdot\vec{y}}{2(1+\vec{x}\cdot\vec{y})}(\vec{x}+\vec{y})$

(3) $AB=1+\sqrt{3}$



$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$\triangle APB=\triangle ABD\times\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{4(2+\sqrt{3})}$

$\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2(2+\sqrt{3})}{4(2+\sqrt{3})}=\dfrac{1}{2}$