



入試問題



ベクトル  $\vec{a} = (4, 0)$ ,  $\vec{b} = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$  について,  $\vec{v} = \cos\theta\vec{a} + \sin\theta\vec{b}$  (ただし  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) とおくと,  $\vec{v}$  の長さの最大値, 最小値, またそのときの  $\theta$  の値を求めよ。  
[日本女子大]

$$|\vec{v}|^2 = (\cos\theta\vec{a} + \sin\theta\vec{b})^2$$

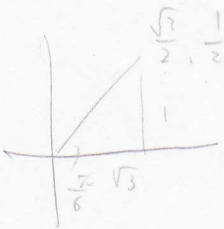
$$= \cos^2\theta|\vec{a}|^2 + 2\sin\theta\cos\theta\vec{a}\cdot\vec{b} + \sin^2\theta|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}| = 4 \quad |\vec{b}| = 2\sqrt{2} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 4\sqrt{3}$$

$$|\vec{v}|^2 = 16\cos^2\theta + 8\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 8\sin^2\theta$$

$$= 16\frac{1+\cos 2\theta}{2} + 4\sqrt{3}\sin 2\theta + 8\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$= 8 + 8\cos 2\theta + 4\sqrt{3}\sin 2\theta + 4 - 4\cos 2\theta$$



$$= 4\cos 2\theta + 4\sqrt{3}\sin 2\theta + 12$$

$$= 8\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\right) + 12$$

$$= 8\left(\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right) + 12$$

cosを合成してsinにする

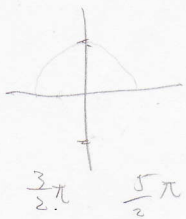
$$-1 \leq \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \quad \therefore \frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{25}{6}\pi$$

$$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi \text{ で最大値をとる}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi \text{ で最大値 } \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi \text{ で最小値}$$

$$\therefore \theta = \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi \text{ で最小値 } \sqrt{4} = 2$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{最大値 } 2\sqrt{5} \quad (\theta = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi) \\ \text{最小値 } 2 \quad (\theta = \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi) \end{array} \right.$$

数楽 <http://www.mathtext.info/>

