

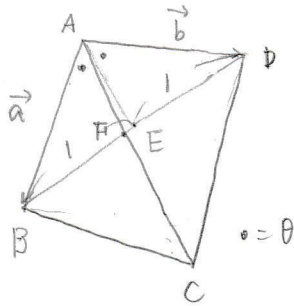
math 64

ok

四角形 ABCD において  $\angle BAC = \angle CAD = \theta$  とする。線分 BD の中点を E とし、線分 BD と線分 AC の交点を F とする。 $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = a$ ,  $|\vec{b}| = b$ ,  $\vec{AC} = x\vec{a} + y\vec{b}$  とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 $x, y$  は実数とし、 $x \neq y$  とする。

- (1)  $\vec{AE}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  の式で表せ。また、 $\vec{EC}$  を  $x, y, \vec{a}, \vec{b}$  の式で表せ。
- (2)  $\vec{AF}$  を  $a, b, \vec{a}, \vec{b}$  の式で表せ。さらに、 $y$  を  $a, b, x$  の式で表せ。
- (3)  $\angle CED = 90^\circ$  であるとき、 $\cos 2\theta$  を  $a, b, x, y$  の式で表せ。

[北海道学園大]

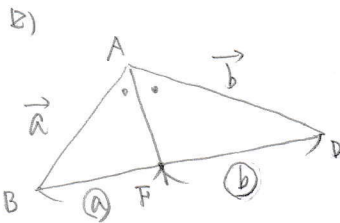


$$(1) \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{EC} = \vec{AC} - \vec{AE} \text{ であるから}$$

$$\vec{EC} = x\vec{a} + y\vec{b} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$\text{整理して } \vec{EC} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\vec{b}$$



$$BF = FD = a = b \text{ であるから}$$

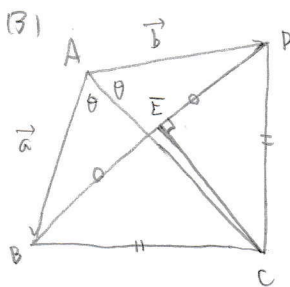
$$\vec{AF} = \left(\frac{b}{a+b}\right)\vec{a} + \left(\frac{a}{a+b}\right)\vec{b}$$

$$\vec{AC} = k\vec{AF} \text{ であるから}$$

$$x\vec{a} + y\vec{b} = k\left(\frac{b}{a+b}\right)\vec{a} + k\left(\frac{a}{a+b}\right)\vec{b}$$

$$\text{係数比較して } x = k\left(\frac{b}{a+b}\right), y = k\left(\frac{a}{a+b}\right) \text{ であるから}$$

$$y = k\left(\frac{b}{a+b}\right) \cdot \frac{a}{b} \text{ と変形して } \underline{y = \frac{a}{b}x}$$



$$\vec{EC} \perp \vec{BD} \text{ より } \vec{EC} \cdot \vec{BD} = 0$$

$$\left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\vec{b} \right\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\vec{a} \cdot \vec{b} + \left(y - \frac{1}{2}\right)b^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)a^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ であるから}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 2\theta \text{ であるから}$$

$$ab\left(x - \frac{1}{2}\right) \cos 2\theta - ab\left(y - \frac{1}{2}\right) \cos 2\theta + \left(y - \frac{1}{2}\right)b^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)a^2 = 0 \text{ であるから}$$

$$ab(x - y) \cos 2\theta = \left(x - \frac{1}{2}\right)a^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)b^2 \quad \text{数楽 } \text{http://www.mathtext.info/}$$

$$\sqrt{2} \cos 2\theta = \frac{(2x-1)a^2 - (2y-1)b^2}{2ab(x-y)}$$