2005

ベクトル73

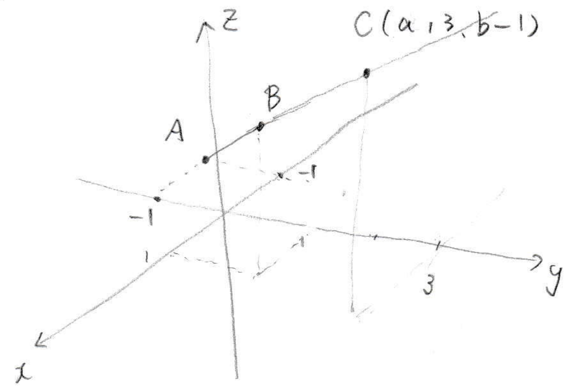
xyz 空間に 2 点 A$(-1,-1,0)$, B$(1,1,2)$ をとる。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 点 C$(a,3,b-1)$ が直線 AB 上にあるように, 実数 a,b の値を定めよ。

(2) $\triangle$ABP が正三角形になるような xy 平面上の点 P の座標をすべて求めよ。

〔岩手大〕

(1)



$\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$　　$\overrightarrow{AC}=(a+1,\ 4,\ b-1)$

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ より $(k\neq0)$　$(a+1,4,b-1)=(2k,2k,2k)$ であるから

y 成分の比較より $k=2$　$\therefore a+1=4$, $b-1=4$ となるので

$a=3$, $b=5$ //

(2) xy 平面上の座標を P$(t,s,0)$ とする.

$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{3}$　$\overrightarrow{AP}\ (t+1,\ s+1,\ 0)$　$\overrightarrow{BP}=(t-1,\ s-1,\ -2)$

$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(t+1)^2+(s+1)^2}$　$|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(t-1)^2+(s-1)^2+4}$

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$ より $|\overrightarrow{AP}|^2=|\overrightarrow{BP}|^2$ であるから $(t+1)^2+(s+1)^2=(t-1)^2+(s-1)^2+4$ より

$\cancel{t^2}+2t+\cancel{1}+\cancel{s^2}+2s+\cancel{1}=\cancel{t^2}-2t+\cancel{1}+\cancel{s^2}-2s+\cancel{1}+4$

$4t+4s=4$ より $t+s=1$　$s=1-t$ …①

また $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AB}|$ より $|\overrightarrow{AP}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$ であるから

$(t+1)^2+(s+1)^2=12$　①より

$(t+1)^2+(2-t)^2=12$

$t^2+2t+1+4-4t+t^2=12$

$2t^2-2t-7=0$

$t=\dfrac{1\pm\sqrt{15}}{2}$　$s=\dfrac{1\mp\sqrt{15}}{2}$　$\therefore$ P$\left(\dfrac{1\pm\sqrt{15}}{2},\ \dfrac{1\mp\sqrt{15}}{2},\ 0\right)$ (複号同順)