ベクトル77　　6k　　1/2

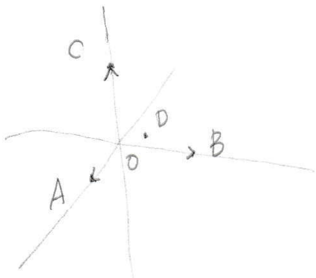
Oを原点とする座標空間に4点 A$(1,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ \sqrt{2},\ 0)$, C$(0,\ 0,\ \sqrt{2})$, D$(1,\ 1,\ 1)$ がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき, 次の問いに答えよ。

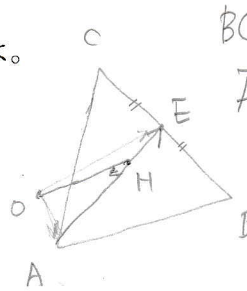
(1) 線分 BC の中点と A を結ぶ直線に O から垂線 OH をおろすとき, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3点 A, B, C で定まる平面と直線 OD との交点を P とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求めよ。

〔宇都宮大〕





BCの中点をEとすると

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$

$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c})$

∴ $\overrightarrow{AE}=(\vec{c}-\vec{a})+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c})$

$\overrightarrow{AE}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$ …①

$\overrightarrow{OH}=(1-t)\overrightarrow{OE}+t\overrightarrow{OA}$ (∵ $0<t<1$)

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\vec{c}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c})=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$ より

$\overrightarrow{OH}=(1-t)\cdot\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+t\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-t(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c})$ …②

①⊥②より

$(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c})\{\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-t(-a+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c})\}=0$

$\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}=0$ より

$-t|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2-t(\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2)=0$

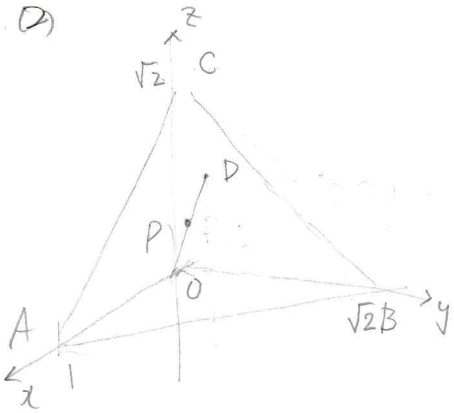
$|\vec{a}|=1$　$|\vec{b}|=\sqrt{2}$　$|\vec{c}|=\sqrt{2}$ より

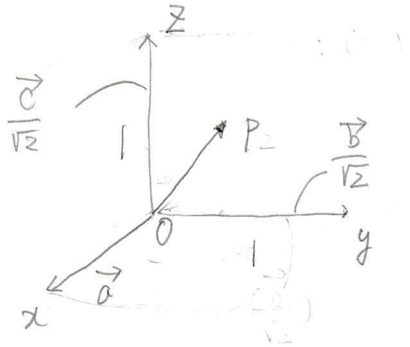
$-t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-t(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=0$

$-2t=-1$

$t=\frac{1}{2}$　　∴ $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$ //

(2)





$\overrightarrow{OP} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ …①　　2/2　ok

∵ $\alpha + \beta + \gamma = 1$ …①'

$\overrightarrow{OP} = k\,\overrightarrow{OD} = k\left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{c}}{\sqrt{2}}\right)$

$= k\vec{a} + \frac{k}{\sqrt{2}}\vec{b} + \frac{k}{\sqrt{2}}\vec{c}$ …②

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立より ①,②から

$k + \frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}} = 1$

$(1+\sqrt{2})k = 1$　　$k = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

∴ $\overrightarrow{OP} = (\sqrt{2}-1)\vec{a} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{b} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{c}$

(3)

$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$ より $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$\overrightarrow{OP} = (\sqrt{2}-1)\vec{a} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{b} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{c}$ より $\overrightarrow{OP} = (\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$

であるから

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cdot(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$

$= \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{1}{2}$

∴ $\frac{1}{2}$

ベクトルクク

宇都宮大