

0/c

xyz空間内に点A(1, 1, 2)と点B(-5, 4, 0)がある。点Cがy軸上を動くとき、三角形ABCの面積の最小値を求めよ。 [千葉大]

C(0, y, 0) とおくと

$$\vec{AC} = (-1, y-1, -2)$$

$$\vec{AB} = (-6, 3, -2)$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \quad \text{①}$$

$$\therefore |\vec{AB}| = \sqrt{36+9+4} = 7$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(y-1)^2+5} \quad \text{②}$$

$$\text{①} = \frac{1}{2} \sqrt{49\{(y-1)^2+5\} - \{6+3(y-1)+4\}^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{49(y^2-2y+6) - (3y+7)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{49y^2-98y+294 - 9y^2-42y-49}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{40y^2-140y+245}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{40\left(y-\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{245}{2}}$$

$$\therefore y = \frac{7}{4} \text{ のとき最小値 } \frac{7\sqrt{10}}{4} \text{ となる}$$