

平面上のベクトル $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ が、 $|\vec{OA}| = 3, |\vec{OB}| = 6, |\vec{OC}| = 2$ と

$$\vec{OB} = \frac{4}{3}\vec{OA} + \frac{3}{2}\vec{OC}$$

を満たす。次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$ を求めよ。

(2) AB を 2:1 に内分する点を P とするとき、 \vec{OP} を \vec{OA} と \vec{OC} で表せ。

(3) $|\vec{OP}|$ を求めよ。

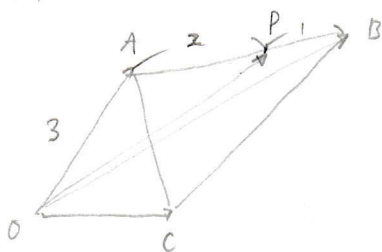
(4) 点 Q が

$$\vec{OQ} = \frac{5}{6}\vec{OA} + \frac{17}{16}\vec{OC}$$

を満たすとき、Q が四角形 OABC の内部にあることを示せ。

京大
[岐阜大]

(1)



$$|\vec{OB}|^2 = \left(\frac{4}{3}\vec{OA} + \frac{3}{2}\vec{OC}\right)^2$$

$$36 = \frac{16}{9}|\vec{OA}|^2 + 4\vec{OA} \cdot \vec{OC} + \frac{9}{4}|\vec{OC}|^2$$

$$36 = 16 + 4\vec{OA} \cdot \vec{OC} + 9$$

$$4\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 11 \quad \therefore \vec{OA} \cdot \vec{OC} = \frac{11}{4}$$

(2) $\vec{OP} = \frac{2}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OA}$ 題意より $\vec{OB} = \frac{4}{3}\vec{OA} + \frac{3}{2}\vec{OC}$ 代入

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\vec{OA} + \frac{3}{2}\vec{OC}\right) + \frac{1}{3}\vec{OA}$$

$$= \frac{8}{9}\vec{OA} + \vec{OC} + \frac{1}{3}\vec{OA}$$

$$\therefore \vec{OP} = \frac{11}{9}\vec{OA} + \vec{OC}$$

165

(3) $|\vec{OP}|^2 = \frac{121}{81}|\vec{OA}|^2 + \frac{22}{9}\vec{OA} \cdot \vec{OC} + |\vec{OC}|^2$

$$= \frac{121}{9} + \frac{22}{9} \cdot \frac{11}{2} + 4 = \frac{121}{9} + \frac{55}{6} + 4 = \frac{242}{18} + \frac{121}{18} + 4 = \frac{435}{18} = \frac{145}{6}$$

$$|\vec{OP}| = \sqrt{\frac{145}{6}} = \frac{\sqrt{870}}{6}$$

(4) $\vec{OB} = \frac{4}{3}\vec{OA} + \frac{3}{2}\vec{OC}$ より

$$\vec{OA} = \frac{3}{4}\left(\vec{OB} - \frac{3}{2}\vec{OC}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\vec{OB} - \frac{9}{8}\vec{OC}$$

$$\vec{OQ} = \frac{5}{6}\vec{OA} + \frac{17}{16}\vec{OC}$$

$$\vec{OQ} = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{4}\vec{OB} - \frac{9}{8}\vec{OC}\right) + \frac{17}{16}\vec{OC}$$

$$= \frac{5}{8}\vec{OB} - \frac{15}{16}\vec{OC} + \frac{17}{16}\vec{OC}$$

$$= \frac{5}{8}\vec{OB} + \frac{1}{8}\vec{OC}$$

数楽 <http://www.mathtext.info/>

\vec{OB} と \vec{OC} の係数はともに正で $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} < 1$ であるから

点 Q は $\triangle OBC$ の内部にある。よって点 Q は四角形 OABC の内部にある。