xy 平面において, 直線 ℓ は曲線 $C_1 : y = x^3 - 4x$ に点 A$(-2, 0)$ で接し, かつ他の点 B で交わっているものとする。また, $C_2 : y = -x^3 + px + q$ は A と B を通る。

(1) p, q の値を求めなさい。

(2) y 軸に平行なすべての直線と y 軸のうち, A を通るものと B を通るものを除いた残りの直線に着目する。このような直線の任意の 1 つが C_1, C_2 と交わる点をそれぞれ P, Q とすれば, 線分 PQ は ℓ で 2 等分されることを示せ。

(3) $-2 < x < 4$ のとき, 線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

〔愛知工大〕

(1) C_1 より $y' = 3x^2 - 4$ となり $(-2, 0)$ における接線の式は

$y = 8x + 16$ となる もう1つの交点Bを求めると

$x^3 - 4x = 8x + 16$

$x^3 - 12x - 16 = 0$

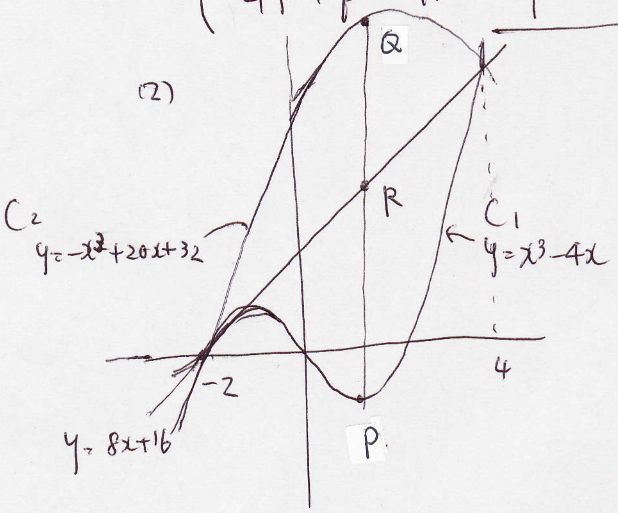
$(x+2)^2(x-4) = 0$　$x = -2, 4$ より

$B(4, 48)$ となる

$A(-2, 0)$　$B(4, 48)$ より

$$\begin{cases} -2p + q = -8 \\ 4p + q = 112 \end{cases} \quad p = 20 \quad q = 32$$

(2)



PとQのx座標をtとすると

$P(t, t^3 - 4t)$, $Q(t, -t^3 + 20t + 32)$

中点Rをすると

$$R\left(\frac{t+t}{2}, \frac{(t^3 - 4t) + (-t^3 + 20t + 32)}{2}\right)$$

より

$R(t, 8t + 16)$ となり

これは ℓ 上の点である。よって

PQの中点Rは常に ℓ 上にあることから

PQは ℓ によって2等分される

(3) $PQ = (-t^3+20t+32)-(t^3-4t)$

$= -2t^3+24t+32$

$P(t) = -2t^3+24t+32$ とおくと

$P'(t) = -6t^2+24$

$= -6(t^2-4)$

$= -6(t+2)(t-2)$

$P(t)$ の極値を求めると

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$P'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$P(t)$	↘	0	↗	64	↘

よって $t=2$ のとき極大値 64 をとる

$\therefore$ $\underline{64}$