放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+y^2-6x+8=0$ の上にそれぞれ点 P, Q がある。線分 PQ の長さが最小となるときの P, Q の位置をそれぞれ $\mathrm{P_0}$, $\mathrm{Q_0}$ とし, 円の中心を C とする。

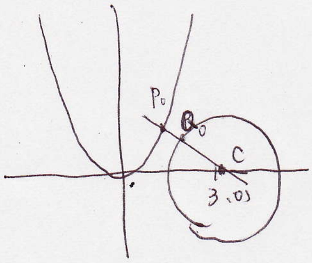
(1) $\mathrm{P_0}$, $\mathrm{Q_0}$ が求められたとして, 3 点 $\mathrm{P_0}$, $\mathrm{Q_0}$, C の位置関係を調べよ。

(2) 線分 $\mathrm{P_0Q_0}$ の長さと $\mathrm{P_0}$ の座標を求めよ。

(3) $\mathrm{Q_0}$ の座標を求めよ。

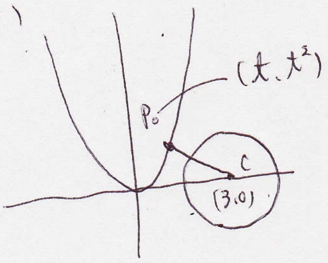
〔奈良教育大〕

(1)



P_0, Q_0, C がこの順で一直線上に並ぶ

(2)



$P_0C^2=(t-3)^2+t^4$

$=t^2-6t+9+t^4$

$f(t)=t^4+t^2-6t+9$ とおくと

$f'(t)=4t^3+2t-6$

$=2(t-1)(2t^2+2t+3)$

ここで $2t^2+2t+3=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$ であるから

$f(t)$ は $t=1$ で極値をとる 増減を調べてみると右下のようになり

$t=1$ で最小値をとる。

x	…	-1		1	…	2
$f'(t)$			$-$	0	$+$	
$f(t)$		17	↘	5	↗	17

このとき $f(t)=5$ であるから

$P_0C=\sqrt{5}$ $\quad P_0Q_0=P_0C-1=\sqrt{5}-1$

$P_0(1,1)$ となる

A $P_0Q_0=\sqrt{5}-1$, $P_0(1,1)$

(3) $P_0(1,1)$, $C(3,0)$ より 直線 P_0C の式は $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$x^2-6x+8+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2=0$

$x^2-6x+8+\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}=0$

$5x^2-30x+41=0$

$x=\frac{15\pm2\sqrt{5}}{5}$ $\quad x<3$ より

$x=\frac{15-2\sqrt{5}}{5}$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ に代入して

$y=\frac{-15+2\sqrt{5}}{10}+\frac{15}{10}$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}$

よって $Q_0\left(\frac{15-2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$