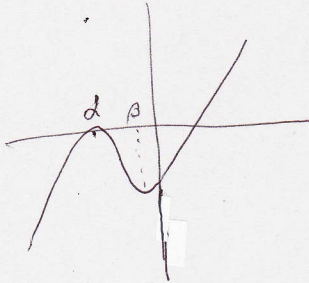




関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ のグラフは原点以外の点で x 軸に接し、またこの関数の極小値は -4 である。 p, q の値を求めよ。 [一橋大]

グラフの根の形はこんな感じ



$x = \alpha$ で極大値 0 をとるとすると

$$f(x) = x(x - \alpha)^2 \text{ と変形できる}$$

こんな式

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) \\ &= x^3 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 x \end{aligned}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 4\alpha x + \alpha^2 \\ &= (x - \alpha)(3x - \alpha) \end{aligned}$$

$$x = \alpha, \frac{\alpha}{3} \text{ で極値をとる}$$

$$x = \frac{\alpha}{3} \text{ で極小値 } -4 \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha}{3}\right) &= \frac{\alpha^3}{27} - \frac{2}{9}\alpha^3 + \frac{\alpha^3}{3} \\ &= \frac{4}{27}\alpha^3 = -4 \end{aligned}$$

$$\frac{4}{27}\alpha^3 = -4$$

$$\alpha^3 = -27$$

$$\alpha = -3$$

これを

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x + 3)^2 \\ &= x(x^2 + 6x + 9) \\ &= x^3 + 6x^2 + 9x \end{aligned}$$

$$\text{よって } p = 6, q = 9$$

