



$y = x^3 - 3ax^2 - 24a^2x + b$ が正の極大値と負の極小値とをもち、その差は4である。

(1)  $a$ の値を求めよ。

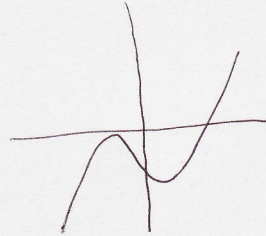
(2)  $b$ の値の範囲を求めよ。

(1)

[東京水産大]

$f(x) = x^3 - 3ax^2 - 24a^2x + b$  とおく

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax - 24a^2$$
$$= 3(x^2 - 2ax - 8a^2)$$
$$= 3(x - 4a)(x + 2a)$$



i)  $a < 0$  のとき

$x = -2a$  で極小値  $x = 4a$  で極大値をとる

$$f(-2a) = -8a^3 - 12a^3 + 48a^3 + b = 28a^3 + b$$

$$f(4a) = 64a^3 - 48a^3 - 96a^3 + b = -80a^3 + b$$

$$(-80a^3 + b) - (28a^3 + b) = -108a^3$$

$$-108a^3 = -4$$
$$a^3 = \frac{1}{27}$$
$$a = \frac{1}{3}$$

ii)  $a > 0$  のとき

$x = -2a$  で極大値  $x = 4a$  で極小値をとる  
同様に

$$(28a^3 + b) - (-80a^3 + b) = 108a^3$$

$$108a^3 = 4$$
$$a^3 = \frac{1}{27}$$
$$a = \frac{1}{3}$$

iii)  $a = \pm \frac{1}{3}$

(2) i)  $a = -\frac{1}{3}$  のとき

極小値は  $28(-\frac{1}{3})^3 + b < 0$  より  $b < \frac{28}{27}$

極大値は  $-80(-\frac{1}{3})^3 + b > 0$  より  $b > -\frac{80}{27}$

よって  $-\frac{80}{27} < b < \frac{28}{27}$

(2) ii)  $a = \frac{1}{3}$  のとき

極小値

$$-80(\frac{1}{3})^3 + b < 0$$

$$b < \frac{80}{27}$$

極大値

$$28(\frac{1}{3})^3 + b > 0$$

$$b > -\frac{28}{27}$$

$$-\frac{28}{27} < b < \frac{80}{27}$$

