2 曲線 $y = x^2$ $\cdots\cdots$①

$y = x^2 - 2x + 3$ $\cdots\cdots$②

がある。

(1) ①, ②の共通接線を求めよ。

(2) ①上に点 P, ②上に点 Q をとり, 線分 PQ の中点を R とする。点 R の存在する領域を図示せよ。

〔昭和薬大〕

(1) ①より $y' = 2x$ ②より $y' = 2x - 2$

となり ①上の点を (t, t^2), ②上の点を $(s, s^2 - 2s + 3)$ とおくと、

接線の式は.

$y = 2t(x - t) + t^2 \rightarrow y = 2tx - t^2 \cdots$(i)

$y = (2s - 2)(x - s) + s^2 - 2s + 3 \rightarrow y = (2s - 2)x - s^2 + 3 \cdots$(ii)

(i)(ii)が一致することから

$2t = 2s - 2$ $t = s - 1 \cdots$(iii)

$-t^2 = -s^2 + 3$

$t^2 = s^2 - 3 \cdots$(iv) (iii)より $(s-1)^2 = s^2 - 3$ $s^2 - 2s + 1 = s^2 - 3$ $-2s = -4$ $s = 2$

より $t = 1$

従って接線の式は $\underline{y = 2x - 1}$

(2) $P(\alpha, \alpha^2)$ $Q(\beta, \beta^2 - 2\beta + 3)$ とすると

$R\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}, \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta + 3}{2}\right)$ $X = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, $Y = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta + 3}{2}$ より

$2X = \alpha + \beta$ $\alpha = 2X - \beta$ を Y に代入して.

$$Y = \frac{(2X - \beta)^2 + \beta^2 - 2\beta + 3}{2}$$

$2Y = 4X^2 - 4X\beta + \beta^2 + \beta^2 - 2\beta + 3$

$2\beta^2 - 2(2X + 1)\beta + 3 + 4X^2 - 2Y = 0$

これが実数解をもてばよいので

判別式 $D/4 \geqq 0$ が条件.

$(2X + 1)^2 - 2(3 + 4X^2 - 2Y) \geqq 0$

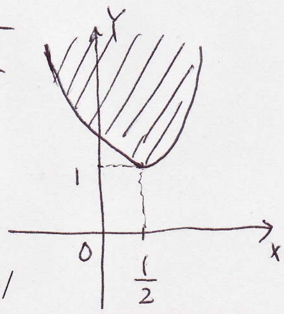
$4X^2 + 4X + 1 - 6 - 8X^2 + 4Y \geqq 0$

$-4X^2 + 4X - 5 + 4Y \geqq 0$

$4Y \geqq 4X^2 - 4X + 5$

$Y = X^2 - X + \frac{5}{4}$

$Y = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$



よって右図のようになる

境界線は含む