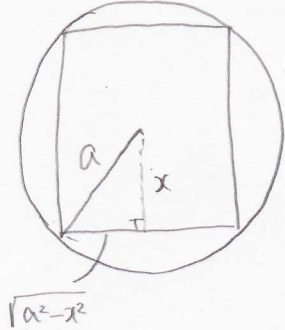




半径 a の球に内接する円柱の体積の最大値を求めよ。

[群馬大]



円柱の高さの半分を x とし
 底面の半径を a と x で表すと
 $\sqrt{a^2 - x^2}$ であるから

体積 V は

$$V = \pi (\sqrt{a^2 - x^2})^2 \cdot 2x$$

$$= 2\pi (a^2 x - x^3) \dots \text{①}$$

①より $2\pi(a^2 x - x^3)$

$$V' = 2\pi(a^2 - 3x^2)$$

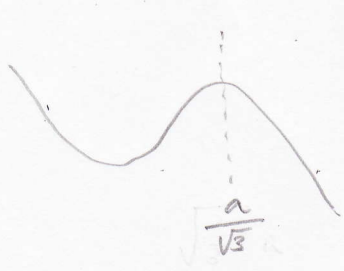
$$= -6\left(x^2 - \frac{a^2}{3}\right)$$

$$= -3\left(x + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

② $x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ で極値をとる

$0 < x < a$ の範囲で V の

...	$-\frac{a}{\sqrt{3}}$...	$\frac{a}{\sqrt{3}}$...
	-		+	
	↘	極小	↗	極大



最大値は $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ において、その値は

$$V = 2\pi \left(\frac{a^3}{\sqrt{3}} - \frac{a^3}{3\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}} \pi a^3$$

$$\therefore \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi a^3$$

