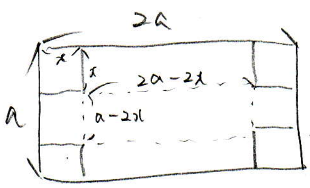
微分 43

aを定数とする。辺の長さがaと$2a$の長方形の厚紙がある。この厚紙の四隅から同じ大きさの正方形を切り落とし，ふたのない直方体の容器を作る。容積が最大になるとき，切り落とした正方形の1辺の長さをaを用いて表わせ。また，そのときの体積を求めよ。ただし，紙の厚さは容積を求めるときに考慮しないものとする。〔信州大〕



四隅の正方形の1辺をxとすると
容積V~~をxの~~関数 $V(x)$として表すと

$V(x)=2x(a-x)(a-2x)$ より

$V(x)=4x^3-6ax^2+2a^2x$

$V'(x)=12x^2-12ax+2a^2$

$\quad =2(6x^2-6ax+a^2)$

$V'(x)=0$とすると $x=\dfrac{6a\pm\sqrt{36a^2-24a^2}}{12}$

$x=\dfrac{3a\pm a\sqrt{3}}{6}$

このxの値で大きい方をβ，小さい方をαとして増減表をかくと

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$V'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$V(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

となる このとき $V(\alpha)$は

$V(\alpha)=4\alpha^3+6a\alpha^2+2a^2\alpha$

$\quad =\alpha(4\alpha^2+6a\alpha+2a^2)$

ここで

$$\begin{array}{r}
\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}a \\
6x^2-6ax+a^2\,\big)\,\overline{4x^3-6ax^2+2a^2x} \\
-)\ 4x^3-4ax^2+\frac{2}{3}a^2x \\
\hline
-2ax^2+\frac{4}{3}a^2x \\
-)\ -2ax^2+2a^2x-\frac{1}{3}a^3 \\
\hline
-\frac{2}{3}a^2x+\frac{1}{3}a^3
\end{array}$$

よって

$V(\alpha)=\underbrace{V'(\alpha)\left(\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{3}a\right)}_{0}-\frac{2}{3}a^2\alpha+\frac{1}{3}a^3$

ここで $\alpha=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}a$ より

$V(\alpha)=-\dfrac{2a^2}{3}\cdot\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}a+\dfrac{a^3}{3}$

$\quad =\dfrac{-3a^3+\sqrt{3}a^3}{9}+\dfrac{3a^3}{9}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}a^3$

∴ $x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}a$ のとき

最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{9}a^3$