



関数 $f(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx$ は $x = 1$ において極大値, $x = 3$ において極小値をとり,
極大値と極小値の差は 8 であるという。 a, b, c の値を定めよ。

$$f'(x) = 3ax^2 + 6bx + 3c \quad \dots ①$$

また 題意より

$$f'(x) = 3a(x-1)(x-3) \quad \dots ②$$

$$= 3a(x^2 - 4x + 3)$$

$$= 3ax^2 - 12ax + 9a \quad \dots ③$$

①, ②, ③ を係数比較する

$$6b = -12a \rightarrow b = -2a$$

$$3c = 9a \rightarrow c = 3a$$

よって

$$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9ax$$

$$f(1) = a - 6a + 9a$$

$$= 4a \quad \dots \text{極大値}$$

$$f(3) = 27a - 54a + 27a$$

$$= 0 \quad \dots \text{極小値}$$

$$4a - 0 = 8$$

$$a = 2$$

よって

$$a = 2, \quad b = -4, \quad c = 6$$

