IIB 微分51

実数 a に対し, 関数 $f(x)=x^3-3x$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ の極値を求め, そのグラフをかけ。

(2) $f(a)=f(a+1)$ を満たす a の値を求めよ。

(3) a の値で場合を分けて, $m(a)$ を a の式として表せ。

(4) 横に a 軸, 縦に b 軸をとり, 平面上に曲線 $b=m(a)$ の概形をかけ。

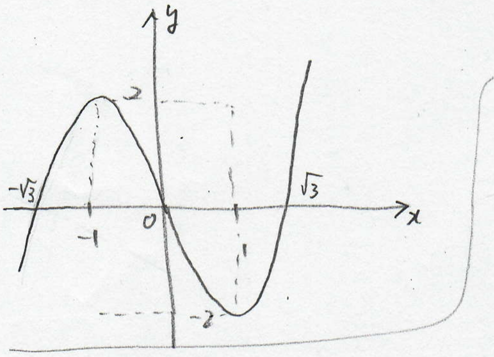
〔中央大〕

(1)

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(x)=x(x^2-3)$.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗



(2) $f(a)=a^3-3a$

$f(a+1)=(a+1)^3-3(a+1)$

$=a^3+3a^2+3a+1-3a-3$

$f(a+1)=a^3+3a^2-2$

これより $a^3-3a=a^3+3a^2-2$

$3a^2+3a-2=0$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{6}$

(3)

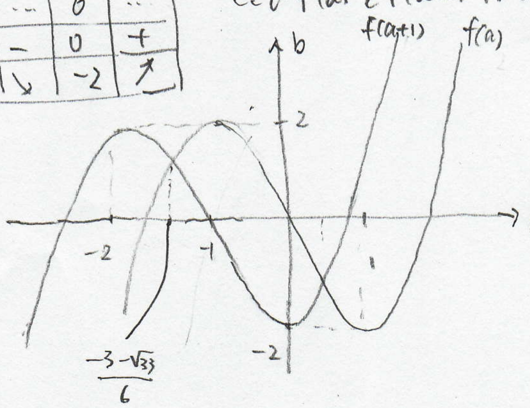
$f(a)=a^3-3a$ $\quad f(a+1)=a^3+3a^2-2$

$f(a)$ のグラフは(1)より知れる $f(a+1)$ のグラフを考えると $f'(a+1)=3a^2+6a=3a(a+2)$ となり増減表をかくと

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(a+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(a+1)$	↗	2	↘	-2	↗

ここで $f(a)$ と $f(a+1)$ のグラフをかくと $f(a+1)=(a+1)(a^2+2a-2)$

左下図のようになる



これより

$a \leqq \dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}$ のとき

$m(a)=a^3-3a$

$\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6} \leqq a \leqq 0$ のとき

$m(a)=a^3+3a^2-2$

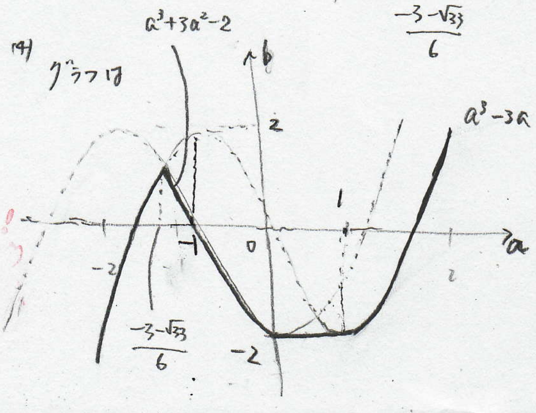
$0 \leqq a \leqq 1$ のとき (この区間に極小値が存在する)

$m(a)=-1$

$a \geqq 1$ のとき

$m(a)=a^3-3a$

(4) グラフは



となる