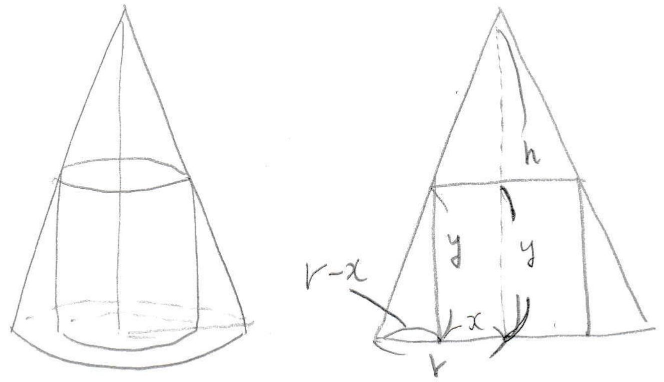
26 bibun 8

8

H28.3.14 訂正

底面の半径が r, 高さが h の直円錐に内接する直円柱のうち, 体積が最大のものを求めよ。ただし, 直円柱の一方の底面は直円錐の底面上にあるものとする。〔有名問題〕



円柱の底面の半径を x, 高さを y とする ($\because x \neq 0, y \neq 0$)

三角形の相似より

$r-x : y = r : h$

$yr = h(r-x)$

$y = \dfrac{h(r-x)}{r}$ …①

円柱の体積 V は $V = \pi x^2 y$ より ①から

$V = \dfrac{\pi x^2 h(r-x)}{r}$

$= \dfrac{h}{r}\pi(x^2 r - x^3)$

r, h, π は定数より $x^2 r - x^3$ が最大になることを考えればよい

$f(x) = x^2 r - x^3$ として

$f'(x) = 2xr - 3x^2$

$= x(2r - 3x)$

$f(x)$ は $x \neq 0$ より $x = \frac{2}{3}r$ で極値をとる

x	0	…	$\frac{2}{3}r$	…
$f'(x)$	0	+	0	−
$f(x)$		↗	$\frac{4}{27}r^3$	↘

$f\left(\frac{2}{3}r\right) = \frac{4}{9}r^3 - \frac{8}{27}r^3$

$= \frac{4}{27}r^3$

よって体積 V の最大値は

$\frac{h}{r}\pi \cdot \frac{4}{27}r^3$ より $\underline{\frac{4}{27}\pi r^2 h}$ //

ちなみに円柱の半径 $\frac{2}{3}r$, 高さ $\frac{1}{3}h$