帰納法 8

2^3 2^3 2
8 8
6 64

nを2以上の自然数とするときn^7-nが7の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ。 〔日本女子大〕

$n=2$のとき

$$2^7-1=128-2$$
$$=126$$
$$=7\cdot 18$$ で成り立つ

ちなみに $n=1$のときも $1^7-1=0=7\cdot 0$ で成り立つ

$n=k$のとき

$$k^7-k=7m \quad (m\text{は自燃数})$$

が成りたつとすると

$n=k+1$のとき

$$(k+1)^7-(k+1)$$
$$={}_7C_0+{}_7C_1k+{}_7C_2k^2+{}_7C_3k^3+{}_7C_4k^4+{}_7C_5k^5+{}_7C_6k^6+{}_7C_7k^7$$
$$-k-1$$
$$=(k^7-k)+({}_7C_1k+{}_7C_2k^2+{}_7C_3k^3+{}_7C_4k^4+{}_7C_5k^5+{}_7C_6k^6)$$

となり k^7-kは7の倍数で

${}_7C_1$, ${}_7C_2$, ${}_7C_3$, ${}_7C_4$, ${}_7C_5$, ${}_7C_6$ もまた7の倍数

よって

$(k+1)^7-(k+1)$は7の倍数である

以上よりすべての自然数nにおいてn^7-nは7の倍数であることが証明された