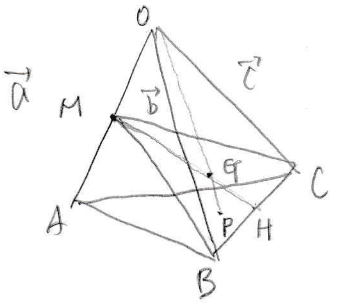
四面体OABCにおいて, 辺OAの中点をM, △MBCの重心をGとし, 直線OGと平面ABCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき, 次の問いに答えよ。

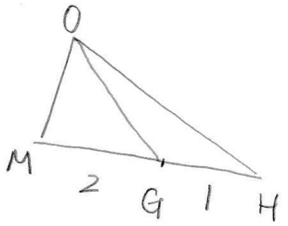
(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) OP : PG を求めよ。



(1)



$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}$ より

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OH}$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$

よって

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ //

(2)

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$

$=\frac{1}{6}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}$

Pは△ABC上の点なので

$\frac{1}{6}k+\frac{1}{3}k+\frac{1}{3}k=1$ が成り立つので.

$\frac{5}{6}k=1 \quad k=\frac{6}{5}$

よって $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}\vec{c}$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$ //

(3) $\overrightarrow{OP}=\frac{6}{5}\overrightarrow{OG}$ より

$5\overrightarrow{OP}=6\overrightarrow{OG}$ よって $\overrightarrow{OP}:\overrightarrow{OG}=6:5$ ゆえに $OP:PG=6:1$ //