三角関数15

x, y が $0 \leqq x,\ y < 2\pi$ のとき，$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{3} \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$ を解くと，$x = \boxed{}$，$y = \boxed{}$ である。

〔玉川大〕

$\sin x = \sqrt{3} - \sin y \rightarrow \sin^2 x = (\sqrt{3} - \sin y)^2$ …①

$\cos x = 1 - \cos y \rightarrow \cos^2 x = (1 - \cos y)^2$ …②

①，② を加えると

$(\sqrt{3} - \sin y)^2 + (1 - \cos y)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$3 - 2\sqrt{3}\sin y + \sin^2 y + 1 - 2\cos y + \cos^2 y = 1$

$2\sqrt{3}\sin y + 2\cos y = 4$

$\sqrt{3}\sin y + \cos y = 2$

$2\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 2$

$\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

より $y + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore y = \frac{\pi}{3}$

このとき

$\cos x + \cos\frac{\pi}{3} = 1$ 　　$\sin x + \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\cos x + \frac{1}{2} = 1$ 　　$\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ 　　$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ 　　$\therefore \underline{x = \frac{\pi}{3},\ y = \frac{\pi}{3}}$