

関数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 1$ について、次の問いに答えよ。ただし、 $0 \leq x < 2\pi$ とする。

- (1) $f(x)$ がとりうる範囲を求めよ。 (2) $f(x) = 0$ を満たす x の値を求めよ。
 (3) $f(x) < 2$ を満たす x の範囲を求めよ。

[静岡大・後期]

(1) 三角関数の合成

$$f(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ より } -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$$

$$\rightarrow -1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \text{ であるから } -2 \leq 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$$

$$\therefore -1 \leq 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \leq 3 \text{ であるから } \underline{-1 \leq f(x) \leq 3}$$

(2)

$$f(x) = 0 \text{ と仮定すれば } 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0 \text{ より}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \quad \sin \theta = -\frac{1}{2} \text{ と仮定すれば } -\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{11}{6}\pi \text{ の範囲では}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi \text{ である。} (\because \theta = x - \frac{\pi}{6})$$

$$\therefore x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \text{ ならば } x = 0, \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \text{ ならば } x = \frac{4}{3}\pi$$

$$\underline{x = 0, \frac{4}{3}\pi}$$

(3)

$$f(x) < 2 \text{ より } 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 < 2 \text{ であるから、これは}$$

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < 1$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \text{ と仮定すれば}$$

$$-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{11}{6}\pi \text{ の範囲では}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi (\because \theta = x - \frac{\pi}{6})$$

ゆえに

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi \text{ の条件を満たす。}$$

ゆえに

$$0 \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi \text{ である}$$

$$\underline{\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{3}, \quad \pi < x < 2\pi}$$

