

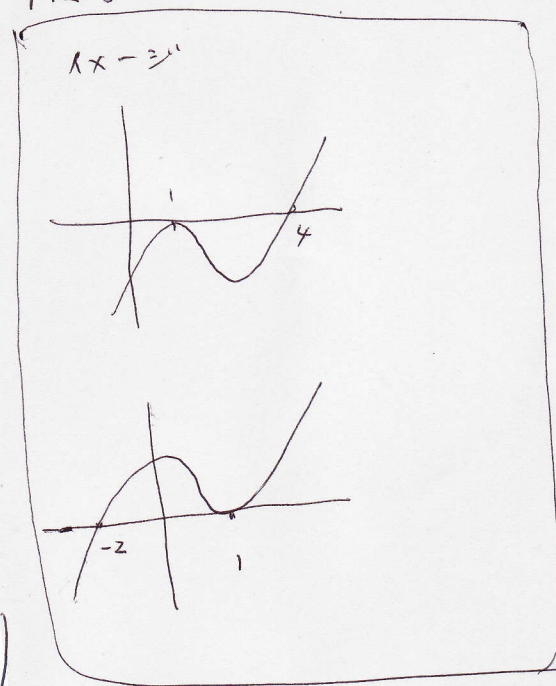


3次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフが $x = 1$ で x 軸に接し、さらにこの曲線と x 軸で囲まれる図形の面積が $\frac{27}{4}$ である。このとき、 a, b, c の値を求めよ。 [茨城大]

$x = 1$ で接するところから、 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ は、

$y = (x-1)^2(x+c)$ とおける。この式を求める面積は

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-c}^1 (x-1)^2(x+c) dx \right| \\ &= \left| \int_{-c}^1 (x-1)^2 \{ (x-1) + (1+c) \} dx \right| \\ &= \left| \int_{-c}^1 (x-1)^3 + (1+c)(x-1)^2 dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{3}(1+c)(x-1)^3 \right]_{-c}^1 \right| \\ &= \left| 0 - \left(\frac{1}{4}(-c-1)^4 + \frac{1}{3}(1+c)(-c-1)^3 \right) \right| \\ &= \left| -\left(\frac{1}{4}(c+1)^4 - \frac{1}{3}(1+c)^4 \right) \right| \\ &= \frac{1}{12}(c+1)^4 \end{aligned}$$



$$\frac{1}{12}(c+1)^4 = \frac{27}{4}$$

$$(c+1)^4 = 81$$

$$c+1 = \pm 3$$

$$\text{よって } c = -4, 2.$$

$$c = -4 \text{ のとき } y = (x-1)^2(x-4) \text{ より}$$

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \text{ となる } a = -6, b = 9$$

$$c = 2 \text{ のとき } y = (x-1)^2(x+2) \text{ より}$$

$$y = x^3 - 3x + 2 \text{ となる } a = 0, b = -3.$$

よって

$$a = -6, b = 9, c = -4 \text{ と } a = 0, b = -3, c = 2$$

