放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸とによって囲まれた部分の面積が直線 $y=mx$ により 2 つに分けられているとき

(1) 放物線と直線によって囲まれる部分の面積を m を用いて表わせ。

(2) また, この放物線と x 軸によって囲まれる部分の面積がこの直線によって 2 等分されるときの m の値を求めよ。

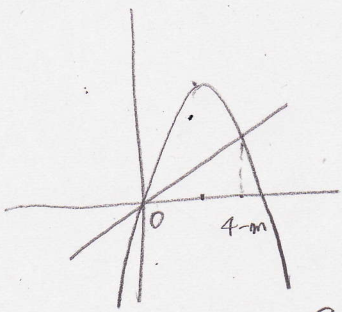
(1) $y=-(x-2)^2+4$

$y=-x^2+4x$ と $y=mx$ の交点を調べると

$-x^2+4x=mx$

$x^2+mx-4x=0$

$x\{x-(4-m)\}=0$



このときの面積Sは

$$S=\int_0^{4-m}(-x^2+4x-mx)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(4-m)^3$$

A $\frac{1}{6}(4-m)^3$

(2) 放物線とx軸に囲まれる面積は

$$\int_0^4(-x^2+4x)\,dx=\frac{1}{6}\cdot 4^3=\frac{32}{3}$$

これより

$\frac{1}{6}(4-m)^3=\frac{16}{3}$ となればよい

$(4-m)^3=32$

$4-m=\sqrt[3]{32}$

$-m=-4+\sqrt[3]{32}$

A $m=4-2\sqrt[3]{4}$