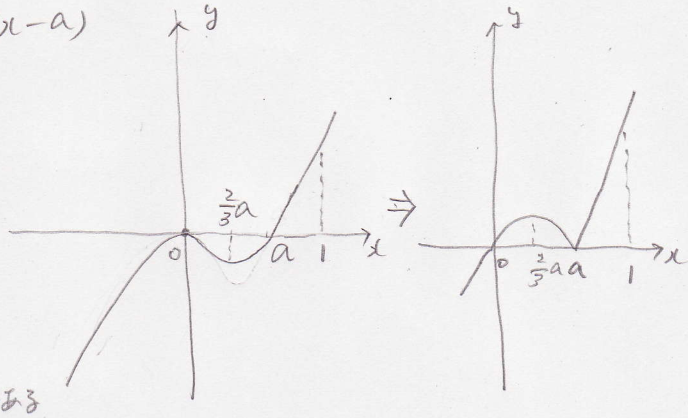
$0 \leqq a \leqq 1$ をみたす定数 a について，$\displaystyle\int_0^1 |x^2(x-a)|\,dx$ 値を求めよ。　〔神戸商船大〕

グラフの概形を書くと次のようである

$f(x) = x^3 - ax^2 = x^2(x-a)$

$f'(x) = 3x^2 - 2ax$

$\quad = x(3x-2a)$



$0 \leqq a \leqq 1$ より　$\frac{2}{3}a < a$ である

よって

$$\int_0^a -x^2(x-a)\,dx + \int_a^1 x^2(x-a)\,dx$$

$$= \int_0^a -x^3+ax^2\,dx + \int_a^1 x^3-ax^2\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3\right]_0^a + \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}ax^3\right]_a^1$$

$$= -\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{3}a^4 + \frac{1}{4}-\frac{1}{3}a-\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^3\right)$$

$$= \frac{1}{12}a^4+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}a+\frac{1}{12}a^4$$

$$= \frac{1}{6}a^4-\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}$$

$$\underline{\frac{1}{6}a^4-\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}}$$