



2t



等式 $f(x) = x^2 \int_{-1}^0 f(t) dt + x \int_0^2 f(t) dt + 1$ をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。 [日本大]

$$f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{①}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left[\frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + t \right]_{-1}^0 + x \left[\frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + t \right]_0^2 + 1 \\ &= \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + 1 \right) x^2 + \left(\frac{8}{3}a + 2b + 2 \right) x + 1 \quad \text{②} \end{aligned}$$

①②は恒等式であるから係数比較して

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + 1 = a \\ \frac{8}{3}a + 2b + 2 = b \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b = 1 \\ \frac{8}{3}a + b = -2 \end{cases}$$

整理して

$$\begin{cases} 4a + 3b = 6 \\ 8a + 3b = -6 \end{cases}$$

2行を引く

$$a = -3, b = 6$$

$$\begin{aligned} 8a + 6b &= 12 \\ -) 8a + 3b &= -6 \\ \hline 3b &= 18 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

よって

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 1$$

18

