積分32

次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=|x(x-1)|$ の概形をえがけ

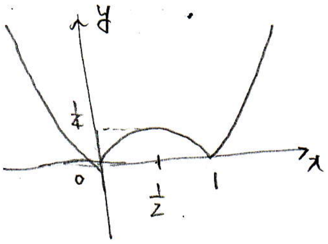
(2) $\displaystyle\int_0^3 |x(x-1)|\,dx$ の値を求めよ。

(3) (1) の曲線と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_1 とする。このとき, 原点を通り, 面積 S_1 を二等分する直線の方程式を求めよ。

(4) (1) の曲線 $(x \geqq 1)$, x 軸および直線 $x=3$ の 3 つで囲まれる図形の面積を S_2 とする。このとき原点を通り, 面積の和 S_1+S_2 を二等分する, 直線の方程式を求めよ。

〔久留米大〕

(1) $x^2-x=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$



(2) $\displaystyle\int_0^3 |x(x-1)|\,dx$

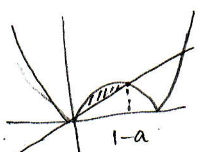
$\displaystyle = \int_0^1 -x(x-1)\,dx + \int_1^3 x(x-1)\,dx$

$\displaystyle = \underbrace{\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1}_{\frac{1}{6}} + \underbrace{\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3}_{\frac{14}{3}} = \frac{29}{6}$ //

(3) 求める直線の式を $y=ax$ とおくと

$-x^2+x=ax$ より $-x(x-1+a)=0$ $x=0,\ 1-a$ で交点をもつ

このとき 下の斜線部の面積を求めると



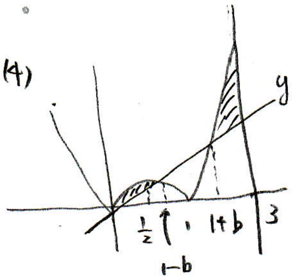
$\displaystyle\int_0^{1-a} -x^2+x-ax\,dx = -\int_0^{1-a} x\{x-(1-a)\}\,dx = \frac{1}{6}(1-a)^3 \cdots ①$

①が $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ になればよいので

$\frac{1}{6}(1-a)^3=\frac{1}{12} \to (1-a)^3=\frac{1}{2}$ $1-a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $a=1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

よって 求める式は $y=\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)x$ //

(4)



求める式を $y=bx$ とすると

$x^2-x=bx$ $x(x-1-b)=0$ $x=0,\ 1+b$ で交点をもつ

求める面積は

$\displaystyle\frac{(1-b)^3}{6} + \int_{1+b}^3 (x^2-x-bx)\,dx$ であり …②

$(1+b)^2\{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b\}$

$\displaystyle\int_{1+b}^3 (x^2-x-bx)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}bx^2\right]_{1+b}^3 = 9-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}b-\frac{1}{3}(1+b)^3+\frac{1}{2}(1+b)^2+\frac{1}{2}b(1+b)^2$

$= \frac{9}{2}-\frac{9}{2}b+\frac{1}{6}(1+b)^3 \cdots ③$

②, ③より $\frac{(1-b)^3}{6}+\frac{(1+b)^3}{6}-\frac{9}{2}b+\frac{9}{2}=\frac{29}{6}\times\frac{1}{2}$

$2(1-b)^3+2(1+b)^3-54b+54=29$

$2(1-b)^3+2(1+b)^3-54b+25=0$

$2(1-\cancel{3b}+3b^2-\cancel{b^3})+2(1+\cancel{3b}+3b^2+\cancel{b^3})-54b+25=0$

$12b^2-54b+29=0$ $b=\frac{27\pm\sqrt{381}}{12}$ $0<b<1$ より $b=\frac{27-\sqrt{381}}{12}$ //

原点における接線の傾きが1だから

数樂 http://www.mathtext.info/