



種合 33



2つの放物線 $C_1: y = x^2 + 1, C_2: y = x^2 + ax + b$ (a, b は定数) について、次の問いに答えよ。

- (1) C_2 が 2 直線 $y = 0, y = -2x - 3$ に接しているとき、 a, b の値を求めよ。
- (2) a, b が (1) で定められた値をとるとき、 C_1, C_2 の共通接線 l の方程式を求めよ。
- (3) C_1 と l との接点 A の座標を求めよ。
- (4) C_1, C_2 と l で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

1) $y=0$ (x軸) と接するから $C_2: y = (x + \frac{1}{2}a)^2$ とおける。 (千葉工大)

共通接線 $l: y = (x + \frac{1}{2}a)^2$

$$x^2 + ax + b = -2x - 3 \quad (x + \frac{1}{2}a)^2$$

$$x^2 + (a+2)x + b+3 = 0 \quad \text{判別式 } D=0 \quad b = \frac{1}{4}a^2$$

$$(a+2)^2 - 4(b+3) = 0 \quad \text{判別式 } D=0 \quad b = \frac{1}{4}a^2 \text{ とおける}$$

$$(a+2)^2 - 4(\frac{1}{4}a^2 + 3) = 0$$

$$x^2 + 4a + 4 - x^2 - 12 = 0$$

$$4a = 8 \quad \therefore a = 2 \quad \therefore b = 1$$

$a = 2, b = 1$

2) $C_1: y = x^2 + 1, C_2: y = x^2 + 2x + 1$

共通接線 $l: y = mx + n$ とおける

$$x^2 + 1 = mx + n \rightarrow x^2 + mx + 1 - n = 0$$

判別式 $D=0 \quad m^2 - 4(1-n) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$$x^2 + 2x + 1 = mx + n \rightarrow x^2 + (2-m)x + 1-n = 0$$

判別式 $D=0 \quad (2-m)^2 - 4(1-n) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} \text{より } m^2 - 4(1-n) = 0 \quad \text{判別式 } D=0 \quad (2-m)^2 - m^2 = 0$$

$$m^2 - 4m + 4 - m^2 = 0 \quad m = 1$$

$$1 - 4(1-n) = 0$$

$$1 - 4 + 4n = 0$$

$$4n = 3$$

$$n = \frac{3}{4}$$

$m = 1, n = \frac{3}{4}$ より

$y = x + \frac{3}{4}$

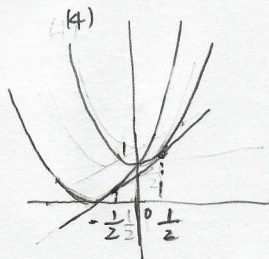
3) $x^2 + 1 = x + \frac{3}{4}$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(2x - 1)^2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$



求めた面積は

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 (x^2 + 2x + 1 - x - \frac{3}{4}) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (x^2 + 1 - x - \frac{3}{4}) dx$$

$$= [\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x]_{-\frac{1}{2}}^0 + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

数楽 <http://www.mathtext.info/>

$= \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x \quad x = \frac{1}{2}$ より

$= \frac{1}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$\therefore \frac{1}{12}$

ちなみに C_2 と l の接点は

$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

$-\frac{2}{4}$

