積分38

点 $\mathrm{P}(0, 2a-1)$ から曲線 $C_1 : y = a - ax^2$ に引いた 2 本の接線の各接点を A, B とし, 曲線 C_1 に点 A, B で接する円を C_2 とする。ただし, $a > 1$ とする。

(1) 点 A, B の座標を求めなさい。

(2) 円 C_2 の中心を E とする。点 E の座標と円 C_2 の半径を求めなさい。

(3) $a = \dfrac{3}{2}$ のとき, 扇形 AEB における弧 AB と曲線 C_1 とで囲まれる部分の面積を求めなさい。

〔帯広畜産大〕

(1) C_1 $y = a(1-x)(1+x)$ $y = -a(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}a$

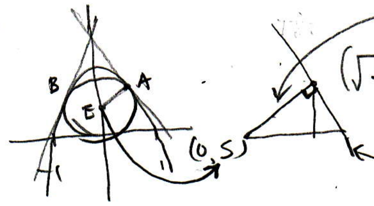
$y' = -2ax$ 接点 $(t, a-at^2)$

$y = -2at(x-t) + a - at^2 \rightarrow y = -2atx + at^2 + a$ これが $\mathrm{P}(0, 2a-1)$ を通るから

$2a-1 = at^2 + a$
$at^2 = a-1$
$t^2 = \dfrac{a-1}{a}$ → $t = \pm\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}$

$y = a - a \cdot \dfrac{a-1}{a} = a - a + 1 = 1$ $\therefore \mathrm{A}\left(\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}, 1\right), \mathrm{B}\left(-\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}, 1\right)$

(2)



$\therefore -2a\cancel{\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}} \cdot \dfrac{1-s}{\cancel{\sqrt{\frac{a-1}{a}}}} = -1$

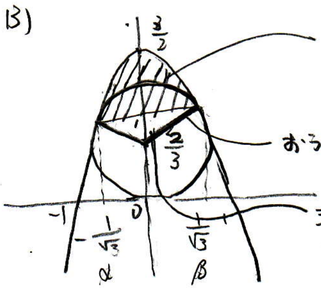
$-2a + 2as = -1$
$2as = 2a-1$
$s = \dfrac{2a-1}{2a}$

$\mathrm{E}\left(0, \dfrac{2a-1}{2a}\right)$ より

$\mathrm{EA}^2 = \left(\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2a}\right)^2 = \dfrac{a-1}{a} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{1}{4a^2} - \dfrac{1}{a} + 1 = \left(\dfrac{1}{2a} - 1\right)^2$

$\therefore \mathrm{E}\left(0, \dfrac{2a-1}{2a}\right)$ 半径 $\dfrac{1}{2a} - 1$

(3)



$\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ の利用 $\rightarrow \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \dfrac{1}{\cancel{4}} \cdot \dfrac{\cancel{8}^2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

おうぎ形 中心角 120° $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\pi \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{27}\pi$

三角形 $\dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \left(1 - \dfrac{2}{3}\right) \times \dfrac{1}{2}$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

$\therefore \dfrac{2\sqrt{3}}{9} - \dfrac{4}{27}\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{4}{27}\pi$

$\sqrt{\dfrac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{4}{27}\pi}$