

2B 種別40

実数 a に対して定積分 $\int_{-1}^1 |x^2 - a| dx$ の値を $f(a)$ と表わす。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 次の各場合に定積分を計算して $f(a)$ を求めよ。

(i) $a \leq 0$

(ii) $0 < a < 1$

(iii) $1 \leq a$

(2) $0 < t < 1$ をみたす t に対して $f(t^2)$ を求めよ。

(3) a が以下の範囲を動くときの $f(a)$ の最小値をそれぞれ求めよ。

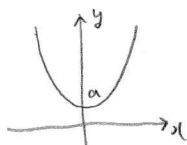
(i) $a \leq 0$

(ii) $0 < a < 1$

(iii) $1 \leq a$

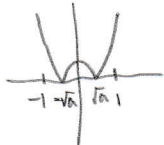
[福井大]

(1) i) $a \leq 0$ のとき $f(a) = x^2 - a$



$$f(a) = 2 \int_0^1 (x^2 - a) dx = \frac{2}{3} - 2a$$

ii) $0 < a < 1$ のとき $f(a) = 2 \int_0^{\sqrt{a}} (-x^2 + a) dx + 2 \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a) dx$



$$= \frac{8}{3} a \sqrt{a} - 2a + \frac{2}{3}$$

iii) $1 \leq a$ のとき $f(a) = 2 \int_0^1 (1 - x^2 + a) dx = -\frac{2}{3} + 2a$



(2) $0 < t < 1$ のとき i) ii) のとき $f(a) = \frac{8}{3} a \sqrt{a} - 2a + \frac{2}{3}$ のとき $f(t^2)$ は

$$f(t^2) = \frac{8}{3} t^3 - 2t^2 + \frac{2}{3} \quad \text{と表す}$$

(3) $f(a) = ?$

i) $a \leq 0$ のとき $f(a) = -2a + \frac{2}{3}$ より最小値は $a = 0$ のとき $f(0) = \frac{2}{3}$

ii) $0 < a < 1$ のとき $f(a) = \frac{8}{3} a \sqrt{a} - 2a + \frac{2}{3}$ より $f'(a) = 8\sqrt{a} - 4 = 4(\sqrt{a} - 1)$ $\sqrt{a} = \frac{1}{2}$ のとき $a = \frac{1}{4}$ のとき

$f(\frac{1}{4}) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 最小値は $\frac{1}{3}$ ($a = \frac{1}{4}$)

iii) $1 \leq a$ のとき $f(a) = 2a - \frac{2}{3}$ より $a = 1$ のとき最小値

$$\therefore f(1) = \frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{a}{b} \right) \begin{cases} a \leq 0 & \text{最小値 } \frac{2}{3} \quad (a=0) \\ 0 < a < 1 & \text{最小値 } \frac{1}{3} \quad (a=\frac{1}{4}) \\ a \geq 1 & \text{最小値 } \frac{4}{3} \quad (a=1) \end{cases}$$