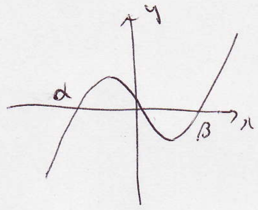
5

曲線 $y=x^3+ax^2-2x$ のグラフと x 軸とで囲まれる面積 S の最小値を求めよ。

〔横浜市大〕

$y=x(x^2+ax-2)$



∵ α, β は

$x^2+ax-2=0$ の異なる2つの解とする

$$\int_\alpha^0 (x^3+ax^2-2x)\,dx+\int_0^\beta (-x^3-ax+2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3-x^2\right]_\alpha^0+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}ax^3+x^2\right]_0^\beta$$

$$=-\left(\frac{1}{4}\alpha^4+\frac{1}{3}a\alpha^3-\alpha^2\right)+\left(-\frac{1}{4}\beta^4-\frac{1}{3}a\beta^3+\beta^2\right)$$

$$=-\frac{1}{4}(\alpha^4+\beta^4)-\frac{1}{3}a(\alpha^3+\beta^3)+\alpha^2+\beta^2 \quad \cdots ①$$

また $\alpha+\beta=-a \quad \alpha\beta=-2$ (解と係数の関係より)

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2+4$

①は $-\frac{1}{4}\{(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2\}-\frac{1}{3}a(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)+\alpha^2+\beta^2$

$$=-\frac{1}{4}\{(a^2+4)^2-8\}-\frac{1}{3}a\cdot(-a)(a^2+4+2)+a^2+4$$

$$=-\frac{1}{4}(a^4+8a^2+8)+\frac{1}{3}a^2(a^2+6)+a^2+4$$

$$=-\frac{1}{4}a^4-\cancel{2a^2}-2+\frac{1}{3}a^4+\cancel{2a^2}+a^2+4$$

$$=\frac{1}{12}a^4+a^2+2$$

$\frac{1}{12}a^4\geqq 0 \quad a^2\geqq 0$ より

$a=0$ のとき最小値 2 となる