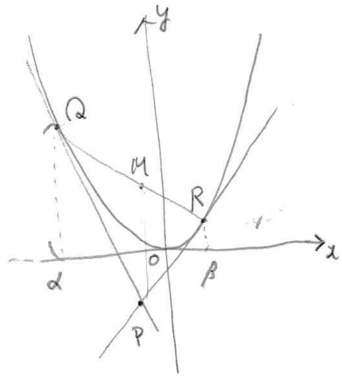
理セ中分58

xy 平面上の 1 点 P から, 放物線 $y = ax^2$ $(a > 0)$ への接線を 2 本引くことができるとき, それぞれの接点を Q, R とする。このとき, Q, R の x 座標をそれぞれ α, β $(\alpha < \beta)$ とする。

(1) 2 つの接点 Q と R を結ぶ線分と, この放物線とで囲まれた図形の面積 S_1 を求めると,

$$S_1 = \frac{a\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

である。



(2) △PQR の面積を S_2 とする。

① P の座標は, $\left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}, a\boxed{オ}\right)$ である。

② QR の中点を M とすると, PM$=\dfrac{a\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である。

③ $S_2 = \dfrac{a\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

〔明治大改〕

(1) 直線 QR を $y = mx + n$ とすると

$$S_1 = \int_\alpha^\beta (mx + n - ax^2)\,dx = -a \cdot -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{a(\beta-\alpha)^3}{6} \quad \cdots ア, イ$$

(2) $y' = 2ax$ より Q における接線は $y = 2a\alpha(x-\alpha) + a\alpha^2 \rightarrow y = 2a\alpha x - a\alpha^2$

同様に R における接線は $y = 2a\beta x - a\beta^2$ これより

$2a\alpha x - a\alpha^2 = 2a\beta x - a\beta^2$

$2a(\alpha-\beta)x = a(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $\rightarrow$ $y = 2a\alpha \cdot \dfrac{\alpha+\beta}{2} - a\alpha^2 = a\alpha\beta$

① $P\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, a\alpha\beta\right)$ ウエオ

② $M\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{a\alpha^2 + a\beta^2}{2}\right)$ より $PM = \dfrac{a\alpha^2 + a\beta^2}{2} - a\alpha\beta$

$= \dfrac{a(\beta-\alpha)^2}{2}$ …カ, キ

③ $S_2 = \dfrac{1}{2} \cdot PM \cdot (\beta-\alpha)$

$S_2 = \dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{4}$