2005

IIB 積分67

3次曲線 $y = x^3 - 3x$ を C_1 とする。a を正の実数とし,C_1 を x 軸方向へ a だけ平行移動した曲線を C_2 とする。

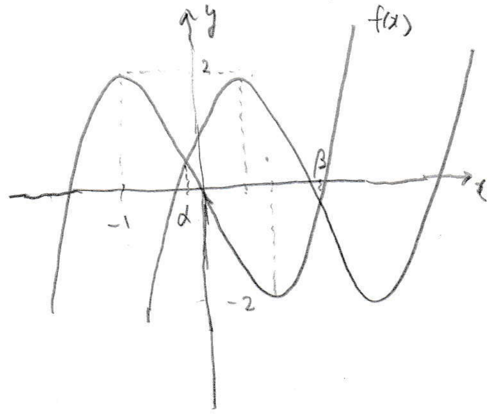
(1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるような a の範囲を求めよ。また, このとき, C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) a が (1) の範囲を動くとき, 面積 $S(a)$ の最大値を求めよ。

〔東北大〕

(1)

$C_1 : f(x) = x^3 - 3x$ とすると $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ より



グラフの概形をかくと左のようになる.

C_2 を $C_2 : g(x) = (x-a)^3 - 3(x-a)$ として

方程式 $f(x) = g(x)$ を考える.

$x^3 - 3x = (x-a)^3 - 3(x-a)$

$\cancel{x^3} - \cancel{3x} = \cancel{x^3} - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 - \cancel{3x} + 3a$

$3ax^2 - 3a^2x + a^3 - 3a = 0$　$a > 0$ より

$3x^2 - 3ax + a^2 - 3 = 0$ としてこの方程式が異なる

2つの実数解をもてばよい

判別式 $D > 0$ が条件となるので

$9a^2 - 12(a^2-3) > 0$　$-3a^2 > -36$, $a^2 < 12$

$a > 0$ と合わせて $0 < a < 2\sqrt{3}$

A, $0 < a < 2\sqrt{3}$

$S(a) = \int_\alpha^\beta g(x) - f(x)\, dx$　∵ α, β は $f(x), g(x)$ の交点で $\alpha < \beta$ とする

$= \int_\alpha^\beta -3ax^2 + 3a^2x - a^3 + 3a\, dx = -3a \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx = \frac{3a}{6}(\beta - \alpha)^3$ …①

ここで (1)の方程式 $3x^2 - 3ax + a^2 - 3 = 0$ を解くと $x = \frac{3a \pm \sqrt{36-3a^2}}{6}$ であるから $\beta = \frac{3+\sqrt{36-3a^2}}{6}$,

$\alpha = \frac{3-\sqrt{36-3a^2}}{6}$ として ①に代入すると $S(a) = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{36-3a^2}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{18} a\sqrt{(12-a^2)^3}$

∴ $S(a) = \frac{\sqrt{3}}{18} a\sqrt{(12-a^2)^3}$

※ Point

(2) $S(a) = \frac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{a^2(12-a^2)^3}$ となり $12 - a^2 = X$ とおく　∵ $0 < a < 2\sqrt{3}$ より $0 < X < 12$

$S(a)$ の最大値を求めるのには根号の中だけ調べればよいので

$F(X) = (12 - X)X^3 = 12X^3 - X^4$　$F'(X) = 36X^2 - 4X^3 = 4X^2(9 - X)$

$X = 0, 9$

X	0	…	9	…	12
$F'(X)$		+	0	+	
$F(X)$		↗		↘	

$X = 9$ より $a^2 = 9$　$a > 0$ より $a = \sqrt{3}$ のとき $S(a)$ は最大値をとる

$S(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{3 \cdot 9^3} = \frac{9}{2}$

$S(a)$ は $a = \sqrt{3}$ のとき最大値 $\frac{9}{2}$ となる