微積分 68

正の定数kに対して, 曲線$C: y=\dfrac{x^3}{3}$の接線の傾きがk^2のものをl_1, l_2とする。Cとl_1, l_2の接点P, Qはそれぞれ, 第1, 第3象限にあるとする。また, Cとl_1との共有点のうち, PでないものをRとする。次の問いに答えよ。

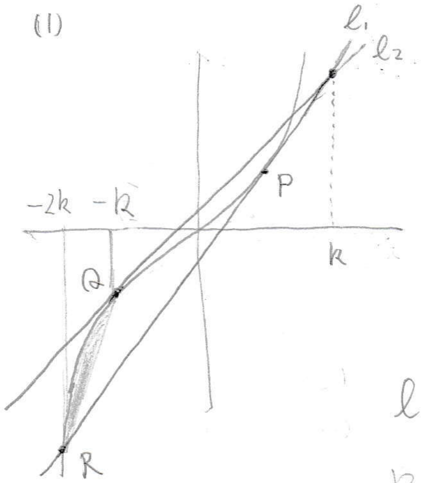
(1) P, Q, Rの座標をkで表せ。

(2) 線分QRとCで囲まれた図形の面積Tをkで表せ。

(3) (2)で求めたTが, $T<1$をみたすようなkの値の範囲を求めよ。

〔東京電機大〕

(1)



(1) $y'=x^2$　$x^2=k^2$ より

$x=\pm k$ となり

Pは第1象限, Qは第3象限にあることから

$P\left(k, \frac{k^3}{3}\right)$, $Q\left(-k, -\frac{k^3}{3}\right)$

l_1の式は $y=k^2(x-k)+\frac{k^3}{3} \to y=k^2x-\frac{2k^3}{3}$

Rの座標を求めるために

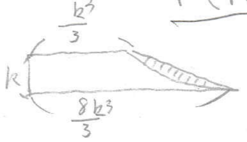
$\frac{x^3}{3}=k^2x-\frac{2k^3}{3}$ として　$x^3-3k^2x+2k^3=0$ …①

①は$(x-k)^2$で割り切れるから

$(x-k)^2(x+2k)=0$ と因数分解でき Rの座標は $\left(-2k, -\frac{8k^3}{3}\right)$

となる　$P\left(k, \frac{k^3}{3}\right)$, $Q\left(-k, -\frac{k^3}{3}\right)$, $R\left(-2k, -\frac{8}{3}k^3\right)$

(2)



囲まれた面積は 台形 $- \int_{-2k}^{-k} -\frac{x^3}{3}\,dx$

$\left(\frac{k^3}{3}+\frac{8k^3}{3}\right)\times k\times\frac{1}{2}-\left[-\frac{x^4}{12}\right]_{-2k}^{-k}=\frac{3}{2}k^4-\left(-\frac{k^4}{12}+\frac{16k^4}{12}\right)=\frac{3}{2}k^4-\frac{5}{4}k^4=\frac{1}{4}k^4$

$T=\frac{1}{4}k^4$

(3) $\frac{1}{4}k^4<1$　$\because k>0$, $k^2>0$ であるから

$k^4<4 \to k^2<2$　　$k<\sqrt{2}$ これと $k>0$ より

$0<k<\sqrt{2}$